

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Bakalářská práce

Brno 2012

Jaroslav Stárek



**MASARYKOVA
UNIVERZITA**
Přírodovědecká fakulta
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky



Elektrostatická kvadrupólová past

Bakalářská práce

Jaroslav Stárek

Vedoucí práce: prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

Brno 2012

Bibliografický záznam

Autor:	Jaroslav Stárek Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce:	Elektrostatická kvadrupólová past
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Fyzika
Vedoucí práce:	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Akademický rok:	2011/12
Počet stran:	vi + 42
Klíčová slova:	Elektrostatická kvadrupólová past; Paulova past; Mathieuova rovnice; nabité částice

Bibliographic Entry

Author:	Jaroslav Stárek Faculty of Science, Masaryk University Department of theoretical physics and astrophysics
Title of Thesis:	Elektrostatic quadrupole trap
Degree Programme:	Physics
Field of Study:	Physics
Supervisor:	prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.
Academic Year:	2011/12
Number of Pages:	vi + 42
Keywords:	Electrostatic quadrupole trap; Paul trap; Mathieu equation; charged particles

Abstrakt

V této bakalářské práci studujeme pohyb elektricky nabitých prachových částic v elektrostatické kvadrupólové pasti (tzv. Paulově pasti), podmínky stability chycených částic a princip fungování. Zabýváme se sestavením pasti, porovnáme experiment s teorií a ukážeme zajímavé jevy probíhající v pasti.

Abstract

This thesis studies the movement of charged dust particles in an electrostatic quadrupole trap (Paul trap), the conditions of stability of trapped particles and the principle of operation. We deal with constructing the trap, compare the experiment to theory and demonstrate some interesting phenomena occurring in the trap.



Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student : Jaroslav Stárek

Studijní program : Fyzika

Studijní obor : Fyzika

Ředitel Ústavu fyzikální elektroniky PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Elektrostatická kvadrupólová past

Elektrostatic quadrupole trap

Zásady pro vypracování:

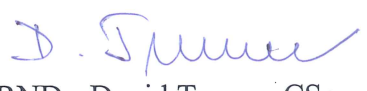
V elektrostatické kvadrupólové pasti (tzv. Paulova past) je pomocí střídavého kvadrupólového elektrického pole vytvořen efektivní potenciál, který přitahuje nabitou částici do místa, kde je pole nulové. Kvadrupólové pasti se ve fyzikálním výzkumu používají především pro zachycení iontů. Cílem bakalářské práce bude sestavit jednoduchou past s pomocí běžně dostupných pomůcek, zachytit s její pomocí nabitě prachové částice a v závislosti na parametrech pasti prozkoumat chování částic v ní. Kromě toho se student seznámí s fyzikou kvadrupólové pasti a pokusí se názorným způsobem vysvětlit princip jejího fungování.

Vedoucí bakalářské práce : prof. Mgr. Tomáš Tyc, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce : září 2011

Datum odevzdání bakalářské práce : dle harmonogramu ak. roku 2011/2012

V Brně dne 30. 11. 2011


prof. RNDr. David Trunec, CSc.
ředitel Ústavu fyzikální elektroniky
PŘF MU

Zadání bakalářské práce převzal dne:

30. 11. 2011

Podpis studenta



Poděkování

V první řadě bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářky prof. Mgr. Tomášovi Tycovi, Ph.D. za jeho trpělivost, věcné rady a zapůjčení laseru a fotoaparátu. Dále RNDr. Pavlovi Konečnému, CSc. za pomoc se zprovozněním experimentu a zapůjčení přístrojů a materiálu potřebnému k provozu pastí. Také bych rád poděkoval Mgr. Jiřímu Bartošovi, Ph.D. za výrobu pastí a zapůjčení fotoaparátu. Též bych rád poděkoval Ondřejovi Hulíkovi za věcné rady a dalším kamarádům a rodině za pomoc při experimentování a podporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 9. květen 2012

.....
Jaroslav Stárek

Obsah

Obsah	1
Úvod	2
Kapitola 1. Lineární Paulova past	3
1.1 Potenciál uvnitř pasti	4
1.2 Mathieuho rovnice	6
1.3 Numerické řešení pohybové rovnice	8
Kapitola 2. Oblasti stability	10
Kapitola 3. Princip	16
3.1 Náorné vysvětlení principu pasti	16
3.2 Pseudopotenciál	18
3.3 Ověření pseudopotenciálu	19
Kapitola 4. Viskozita a gravitace	21
4.1 Pohybová rovnice	21
4.2 Numerické řešení	22
4.3 Pseudopotenciál	25
Kapitola 5. Experiment	27
5.1 Výstavba	27
5.2 První seznámení a porovnání s teorií	30
5.3 Čtverec	33
5.4 Trojúhelník	34
5.5 Vlnky	35
5.6 Zajímavosti a něco k zamyšlení	38
Závěr	39
Příloha	40
Literatura	42

Úvod

V 50. letech minulého století vývoj částicových urychlovačů a hmotnostních spektrometrů vedl k potřebě vytvoření různých pastí pro nabitě částice. První nabitá částice byla chycena v hyperbolické elektrické pasti radiových frekvencí navrhnuté Wolfgangem Paulem, který v roce 1989 dostal Nobelovu cenu za fyziku za svůj přínos k metodám iontových pastí. Ve stejném roce byla demonstrována nová konstrukce iontové pasti, tzv. lineární Paulova past. Ta byla schopna zachytit větší množství částic a zmenšit nežádoucí efekty rádiových frekvencí uvnitř pasti [3].

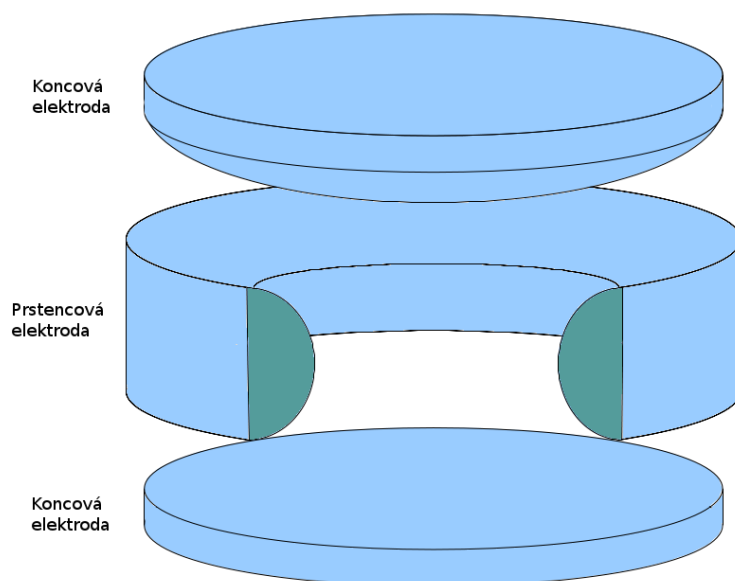
A právě lineární Paulova past je motivace pro tuto bakalářskou práci, nikoli však pro ionty, nýbrž pro chytání nabitých prachových částic. Budeme se zabývat pohybem částic uvnitř pasti, podmínkami stability v závislosti na parametrech a pokusíme se názorně vysvětlit princip fungování pasti. V experimentální části sestavíme lineární Paulovu past, porovnáme teoretické i experimentální výsledky a ukážeme si, co se v pasti může dít neočekávaného. Doprovodná videa k této části naleznete na přiloženém DVD, popis k nim je v příloze.

Kapitola 1

Lineární Paulova past

Zachycení nabité částice ve statickém elektrickém poli není možné, protože žádný potenciál splňující Laplaceovu rovnici, $\Delta\phi(x) = 0$, neobsahuje minima [3]. Proto je potřeba pracovat s proměnným potenciálem a hledat jiné možnosti.

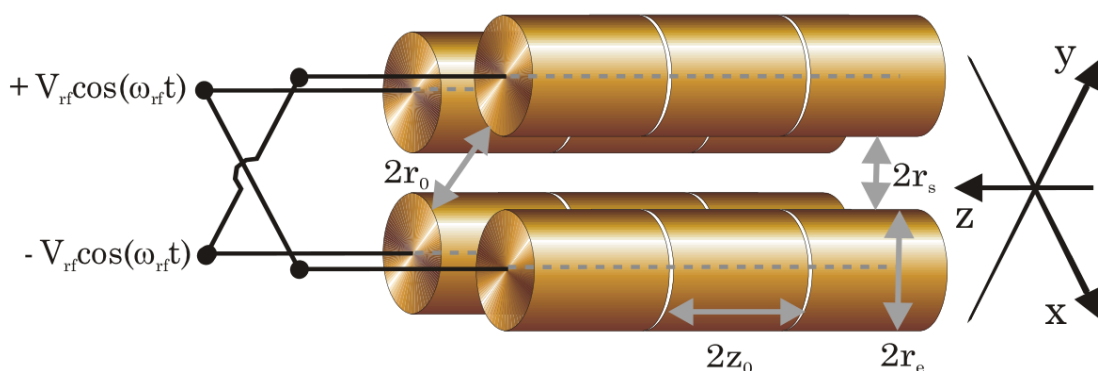
Jednou z nich je vytvoření elektrostatické kvadrupólové pasti se střídavým potenciálem. V praxi se využívá více geometrických uspořádání, pod pojmem Paulova past se běžně myslí konstrukce ze 3 elektrod kruhové symetrie, viz obrázek 1.1.



Obrázek 1.1: Paulova past. Na elektrody je přivedeno střídavé napětí, koncové části jsou obvykle spojené. Iontové pasti používané v praxi se pak umísťují do vakuovaných nádob a případně se ionty chladí na velmi nízké teploty pro další zkoumání.

Lineární Paulova past se v praxi běžně konstruuje ze čtyř rovnoběžných válců umístěných do vrcholů čtverce, viz obrázek 1.2.

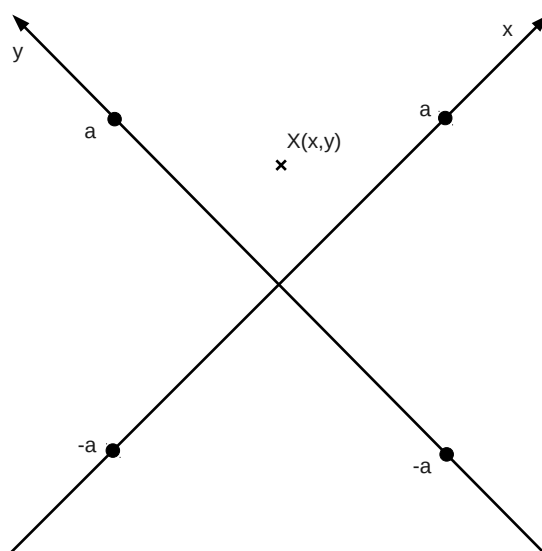
V našem experimentu budeme používat čtyři rovnoběžné dráty, v teorii budeme nadále počítat se zapojením tak, jak je zobrazeno na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Lineární Paulova past. Protějšší válce jsou propojeny a je na ně přiveden potenciál tak, jak je znázorněno na obrázku. Obrázek je převzatý z [3] a upravený.

1.1 Potenciál uvnitř pasti

Na obrázku 1.3 je zobrazeno usazení drátů do soustavy souřadnic z pohledu osy z , tj. z pohledu rovnoběžného s dráty.



Obrázek 1.3: Umístění drátů do soustavy souřadnic, kolmý řez vůči drátům.

Intenzita od jednoho nekonečně dlouhého drátu je z Gaussovy věty:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.1)$$

kde τ je délková hustota náboje a r je vzdálenost od středu drátu. Potenciál se spočte integrací elektrické intenzity:

$$\phi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C, \quad (1.2)$$

kde konstanta C by měla obsahovat referenční potenciál ϕ_0 a jednotkovou korekci logaritmu $-\ln c$, kde c má rozměr délky. Tedy $C = \phi_0 - \ln c$.

Po započtení potenciálů od všech čtyřech vodičů je na povrchu libovolného drátu o poloměru r_0 potenciál

$$\Phi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln r_0 + \ln 2a - \ln a\sqrt{2} \right) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{a}. \quad (1.3)$$

Vidíme, že se konstanty se odečetly. To mimo jiné naznačuje, že aproximace nekonečně dlouhého drátu by uvnitř pasti neměla dělat problémy. Tento vztah je již aproximací, protože vlivem okolních vodičů se náboj na drátu přeskupí a nebude homogenní, tedy i potenciál bude vypadat trochu jinak. V obecném bodě pak potenciál vypadá takto:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(x^2 + (a-y)^2)^{\frac{1}{2}} + \ln(x^2 + (a+y)^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. - \ln((x-a)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \ln((x+a)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Potenciál rozvineme do Taylorovy řady. Členy nultého řádu, prvního řádu a smíšený člen druhého řádu jsou nulové. Kvadratické členy vypadají takto:

$$\phi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{4}{a^2} (x^2 - y^2), \quad (1.5)$$

Členy třetího řádu jsou též nulové. Pole v blízkosti středu pasti je tedy s dobrou přesností kvadrupólové. Dosazením (1.3) do (1.5) dostaneme

$$\phi = \frac{4\Phi}{a^2 \ln \frac{r_0}{a}} (x^2 - y^2), \quad (1.6)$$

což je přibližný hledaný potenciál uvnitř pasti.

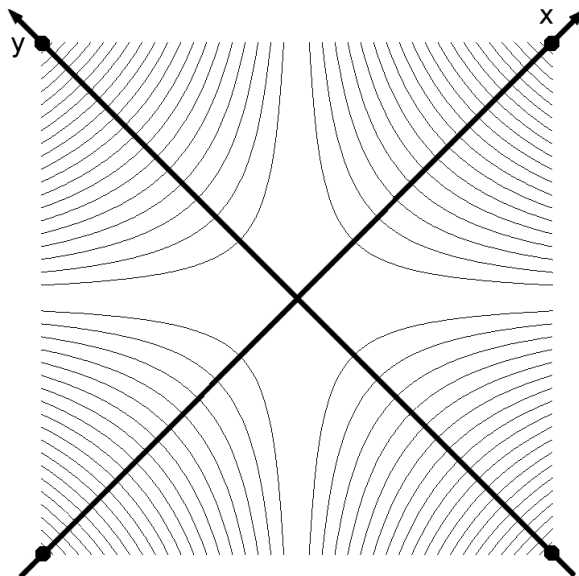
Zkusme se teď podívat na tvar elektrického pole uvnitř pasti. Na obrázku 1.4 je vykresleno několik ekvipotenciál uvnitř pasti, které jsou dány upraveným vztahem (1.6), $C = x^2 - y^2$, a vykresleny pro několik hodnot C .

K nalezení siločar si musíme udělat malý výlet do komplexní analýzy.

Uvažujme holomorfní funkci $f(z) = f(x+iy)$, kterou můžeme rozdělit na reálnou a imaginární část, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ musí splňovat Cauchy-Riemannovy podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \\ -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.7)$$

a tedy splňují podmínky $\nabla^2 u(x, y) = 0$ a $\nabla^2 v(x, y) = 0$, tj. jsou harmonické. Pak křivky $u(x, y) = C_1$ a $v(x, y) = C_2$ jsou na sebe kolmé. Víme, že ekvipotenciály a elektrické siločáry jsou na sebe též kolmé. Tedy zvolením funkce $u(x, y) = x^2 - y^2$,



Obrázek 1.4: Ekvipotenciály uvnitř pasti.

která je harmonická, a použitím Cauchy-Riemannových podmínek můžeme dopočítat $v(x, y)$ a tím najít i předpis pro siločáry, $v(x, y) = C_2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) &= 2x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Rightarrow v = 2xy + k(x), \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= 2y + k'(x) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2y \Rightarrow k'(x) = 0, \end{aligned}$$

a konečně

$$v = 2xy + k \quad (1.8)$$

Na obrázku 1.5 je vykresleno několik siločar uvnitř pasti, které splňují nalezený předpis $xy = C_3$. Jsou to opět hyperboly, jen jsou otočené o 45° .

1.2 Mathieuho rovnice

Díky principu superpozice je možné jednoduše rozdělit zjištěný potenciál na dvě složky ve směrech os. V následujících kapitolách budeme pro jednoduchost počítat pouze v jednom rozměru, konkrétně ve směru osy x , pokud nebude řečeno jinak.

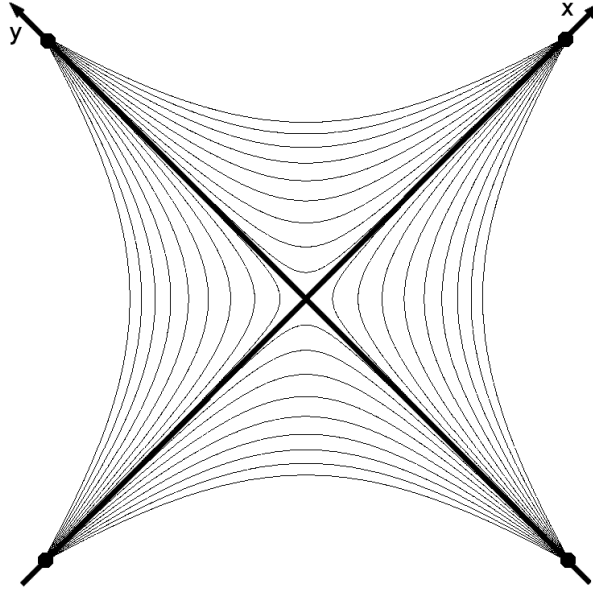
Pohybová rovnice nabité částice v elektrickém poli je

$$m\ddot{x} = -Q \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Magnetickou indukci vznikající pohybem nabitých částic zanedbáme.

Dosazením upravené rovnice (1.6) do (1.9) vznikne

$$m\ddot{x} = -Q \frac{8\Phi}{a^2 \ln \frac{r_0}{a}} x. \quad (1.10)$$



Obrázek 1.5: Siločáry uvnitř pasti.

U lineárních Paulových pastí používaných například ve hmotnostních spektrometrech nalezneme potenciál ve tvaru $\Phi = V + U \cos \Omega t$. Dosazením do (1.10) dostaneme rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{8Q}{ma^2 \ln \frac{r_0}{a}} (V + U \cos \Omega t)x = 0, \quad (1.11)$$

která je formálně podobná tzv. Mathieuho rovnici (Mathieu equation) [1]. Její kanonický tvar je

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + (a_x - 2q_x \cos 2\xi)x = 0 \quad (1.12)$$

a používá se například k popisu různých zajímavých fyzikálních experimentů souhrnně nazývaných parametrické oscilace. Jedním z nich je i Paulova past. Některým vlastnostem Mathieuho rovnice se budeme věnovat v kapitole 2.

V našem experimentu budeme používat potenciál $\Phi = U \cos \Omega t$, tím se pohybová rovnice zjednoduší na

$$\ddot{x} = -\frac{8QU}{ma^2 \ln \frac{r_0}{a}} x \cos \Omega t. \quad (1.13)$$

Budící člen obsahuje informace o struktuře pasti a aproximaci nekonečně dlouhého drátu. Substitucí za ně můžeme rovnici (1.13) trochu zpřesnit:

$$\ddot{x} = -\frac{2QW}{m} x \cos \Omega t, \quad W = \frac{4U}{a^2 \ln \frac{r_0}{a}}. \quad (1.14)$$

Parametr charakterizující částici je poměr $\frac{Q}{m}$, který lze pomocí hmotnostních spektrometrů měřit poměrně přesně. Ale k určení náboje či hmotnosti je potřeba využít i nějaké další znalosti. Profesionální hmotnostní spektrometry je možné vyladit do extrémních přesností.

1.3 Numerické řešení pohybové rovnice

Pro vytvoření představy, jak se částice v pasti bude pohybovat, je vhodné si vykreslit numerické řešení pohybové rovnice. K tomu potřebujeme odhadnout náboj Q a hmotnost m zachycených částic. Aproximujme je koulemi o poloměru $r \doteq 50 \mu\text{m}$ a hustotě $\rho \doteq 800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (hodnoty jsou převzaty z našeho experimentu), hmotnost pak spočteme jako $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$.

Určení náboje je o něco náročnější, jeho horní odhad Q_{\max} uděláme z dielektrické pevnosti vzduchu. Při větším náboji než Q_{\max} by pak docházelo k sršení. Náboj Q pak bude $Q = kQ_{\max}$, kde $0 < k < 1$ bude k -násobek horního odhadu.

Elektrickou intenzitu na povrchu koule o poloměru r spočteme z Gaussova zákona:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.15)$$

Horní mez náboje na kulové prachové částici je tedy

$$Q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 r^2 E_m, \quad (1.16)$$

kde $E_m \doteq 3 \text{ MV}\cdot\text{m}^{-1}$ je dielektrická pevnost vzduchu. Pro náš odhadovaný poloměr dostaneme přibližně $Q_{\max} \doteq 8,34 \times 10^{-13} \text{ C} \doteq 5 \times 10^6$ elementárních nábojů.

Diferenciální rovnici druhého řádu (1.14) si rozdělíme do dvou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2QW}{m}x_1 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (1.17)$$

a dosadíme výše odhadnuté hodnoty. Rozměry pasti použité v experimentu jsou $r_0 = 1 \text{ mm}$ a $a = 5\sqrt{2} \text{ mm}$.

Pro numerické řešení v programu Matlab vytvoříme soubor `paul.m` a nadefinujeme do něj získanou soustavu rovnic:

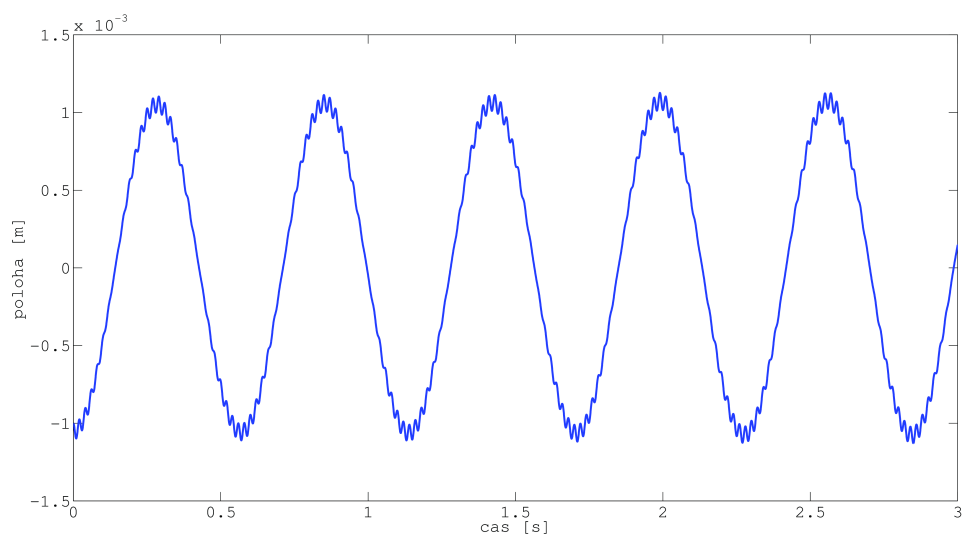
```
function xprime = paul(t,x,q);
f=q(1); U=q(2); k=q(3);
xprime=[x(2); 0.00815*U*k/r*x(1)*cos(2*pi*f*t)];
```

V Matlabu pak najdeme a označíme vytvořený soubor a napíšeme do příkazové oblasti následující příkazy:

```
tspan = 0:0.00025:3
x0=[-0.001 0]
q=[50 750 0.04]
[t,x]=ode45(@paul,tspan,x0,[],q)
plot(t,x(:,1))
```

První z nich nastaví interval vstupních hodnot pro čas $t \in \langle 0, 3 \rangle$ a krok 0,025 s. Druhý z nich nastaví počáteční podmínky: polohu a rychlost. Třetí nastaví potřebné parametry v rovnici, tj. $f = 50 \text{ Hz}$ (frekvence budícího pole), $U = 750 \text{ V}$ (amplituda napětí), $k = 0,04$ (násobek maximálního odhadnutého náboje). Čtvrtý provede

výpočet pomocí numerické metody Runge-Kutta čtvrtého řádu s nadefinovanými argumenty a pátý vykreslí graf závislosti polohy na čase. Poloha $x = 0$ m je geometrický střed pasti. Pro výše zvolené hodnoty dostaneme graf na obrázku 1.6. Tyto hodnoty budeme nadále používat implicitně, pokud nebude řečeno jinak.



Obrázek 1.6: Graf závislosti polohy na čase pro hodnoty $f = 50$ Hz, $U = 750$ V, $N = 0,04$.

Kapitola 2

Oblasti stability

Jedna z věcí, která by nás mohla zajímat, je, kdy se nějaká částice zachytí v pasti a nějakou dobu se zdrží. Dá se ukázat, že pro určité hodnoty parametrů a_x a q_x kanonického tvaru Mathieuovy rovnice

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + (a_x - 2q_x \cos 2\xi)x = 0 \quad (2.1)$$

je řešení stabilní a pro jiné nestabilní. Vykreslíme-li tyto parametry do grafu, získáme oblasti stabilního řešení Mathieuovy rovnice, viz obrázek 2.1. [3][1][2]

Substitucí $\pi ft = \xi$ upravíme pohybovou rovnici (1.11) do tvaru

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{8QW}{\Omega^2 m} x \cos 2\xi = 0 \quad (2.2)$$

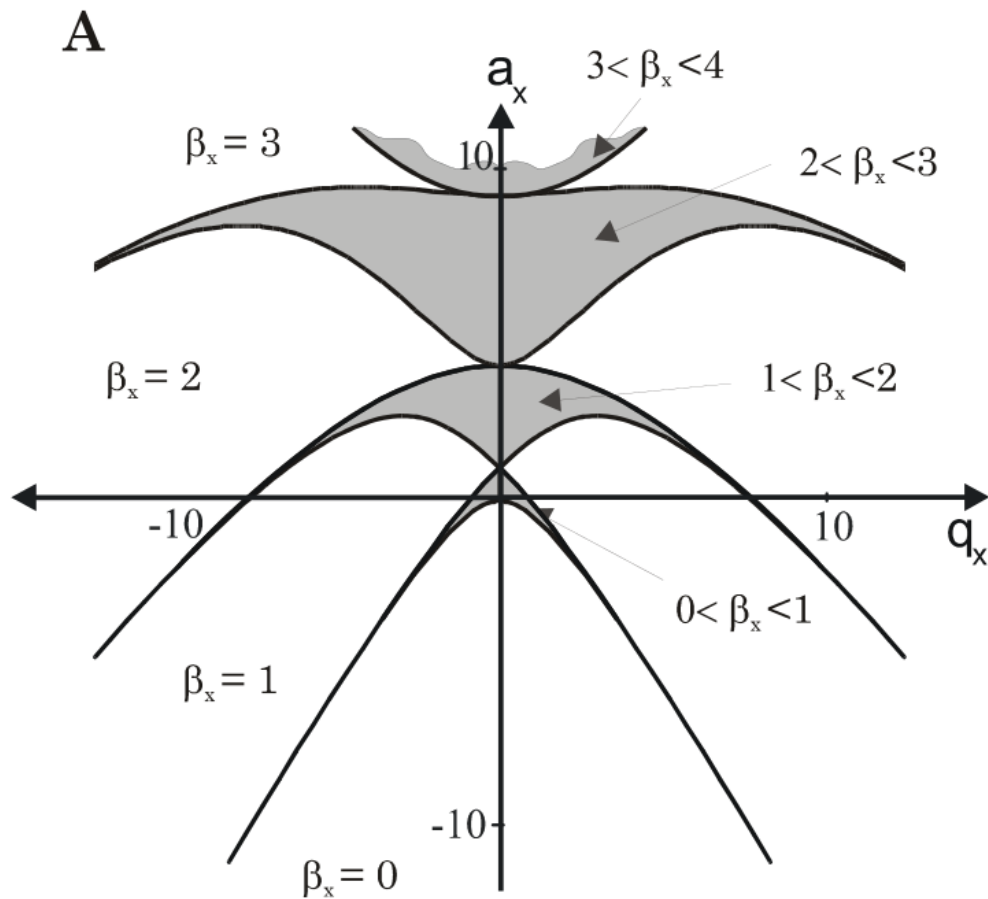
a porovnáním zjistíme

$$a_x = 0, \quad q_x = -\frac{4QW}{\Omega^2 m}. \quad (2.3)$$

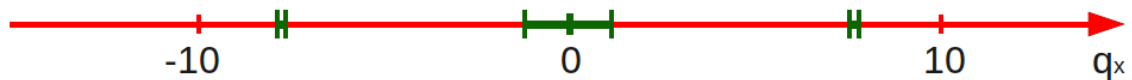
Vidíme, že se nám značně zjednodušilo hledání stabilních poloh pouze na jednu osu, viz obrázek 2.2. Dosazením hodnot použitých na konci předchozí podkapitoly do (2.3) dostaneme $q_x = -0,099$, pohybujeme se tedy v oblasti kolem nuly. V monografii o Mathieuových funkcích [2] se nachází jedna zajímavá tabulka, ve které jsou napsané číselné hodnoty průsečíků hranic stabilních oblastí s osou q_x . První stabilní oblast kladné části poloosy leží v intervalu $\langle 0, 0,88 \rangle$, druhá v intervalu $\langle 7,51, 7,57 \rangle$, třetí (která už není na obrázku 2.2 znázorněna) už je velmi úzká a leží někde v okolí bodu $q_x = 21,28$.

Nyní můžeme otestovat náš numerický model. Zachováme všechny hodnoty použité na konci předchozí kapitoly vyjma napětí, které dopočítáme zpětně tak, aby $q_x = -0,88$, tedy $U = 6666$ V, což je hranice první stabilní oblasti. Viz obrázek 2.3.

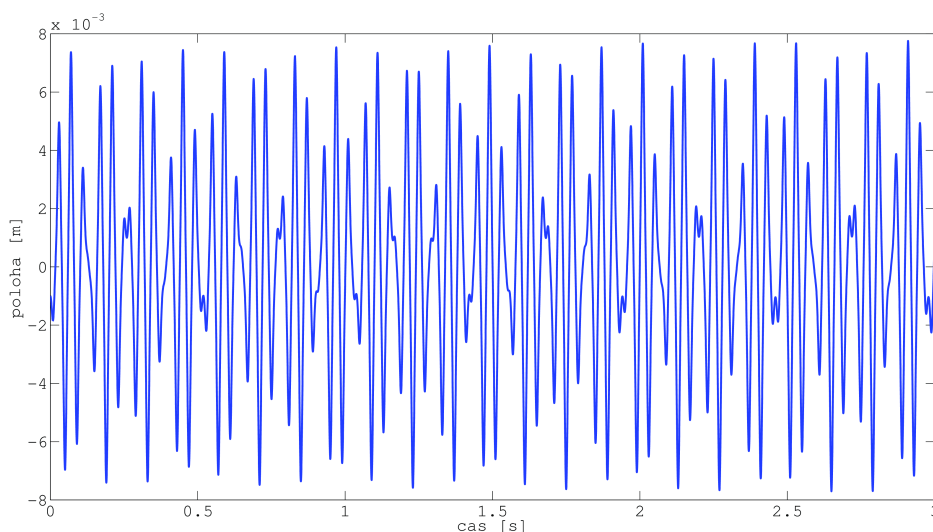
Pro zvolené parametry pasti se v polohách přibližně ± 6 mm nachází povrch drátů. Amplituda kmitů částice je ~ 8 mm, tedy řešení je sice stabilní, avšak experimentálně neproveditelné.



Obrázek 2.1: Oblasti stability Matieho rovnice v závislosti na parametrech a_x a q_x . Šedým oblastem odpovídá stabilní řešení, kdy se částice udrží v pasti. Bílé oblasti jsou naopak nestabilní, kdy se částice neudrží a vyletí z pasti. Převzato z [3].



Obrázek 2.2: Osa q_x se zeleně vyznačenými stabilními oblastmi, které odpovídají nalezené hodnotě $a_x = 0$.

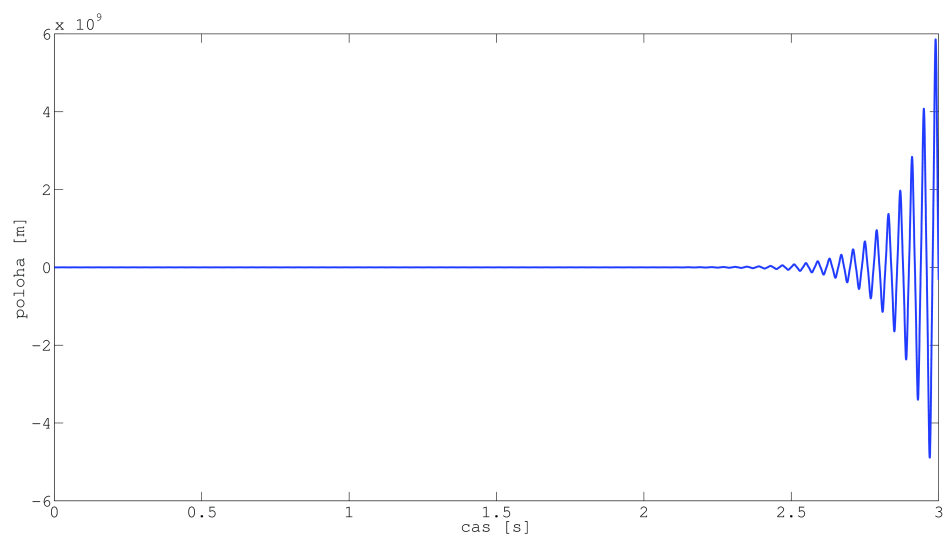


Obrázek 2.3: Ještě stabilní poloha pro $U = 6666$ V, avšak experimentálně neproveditelná.

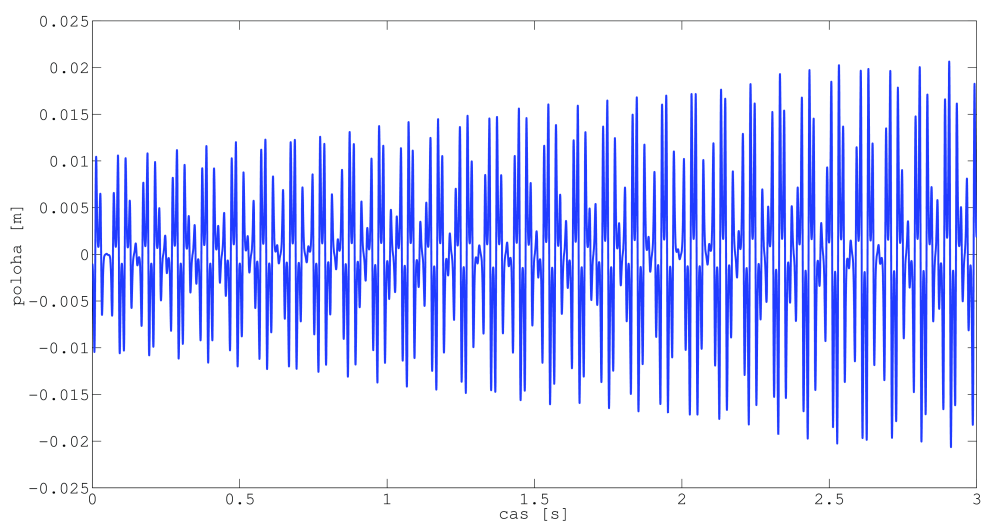
Pozornějším čtenářům neunikne postupné zvětšování amplitudy. Tento jev se vyskytuje u libovolného nastavení parametrů, avšak čím větší je hodnota parametru q_x , tím rychleji roste amplituda. Proč tomu tak je, nevím. Pro náš experiment to není překážkou, v kapitole 4 započteme viskozitu, která změní chování částice v pasti, a tento jev vymizí.

Zvolíme-li napětí o trochu větší, než je mezní případ, např. $U = 6900$ V, pak amplituda začne divergovat a částice velmi rychle opustí past. Graf je zobrazen na obrázku 2.4.

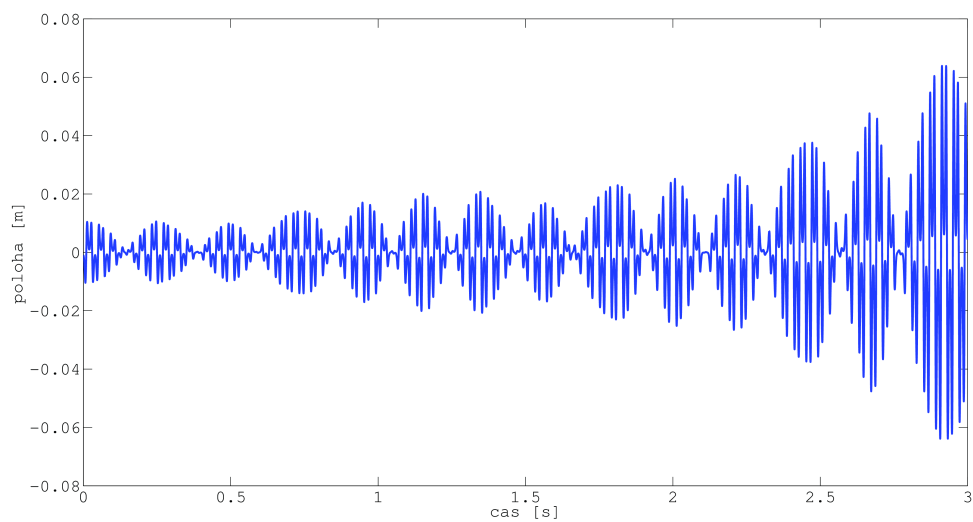
Obdobným způsobem můžeme prozkoumat druhou stabilní oblast záporné části poloosy, $-q_x \in \langle 7,51, 7,57 \rangle$. Spočtené krajní hodnoty napětí jsou $U_{\min} = 56,9$ kV a $U_{\max} = 57,4$ kV. Na obrázcích 2.5 až 2.8 je vykresleno několik časových závislostí polohy. Žádné z nalezených řešení není experimentálně proveditelné, amplituda kmitů je větší, než jsou rozměry pasti. Navíc po delším časovém úseku (řádově desítky sekund) všechna zobrazená řešení divergují. Pokud bychom si vykreslili řešení pro napětí někde ze středu předpovězené stabilní oblasti, bude trvat mnohem déle, než amplituda začne divergovat.



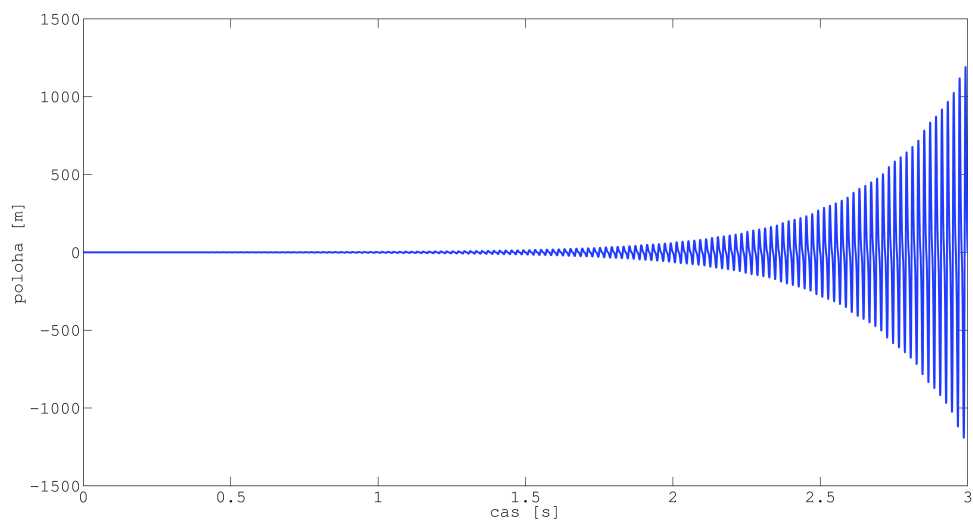
Obrázek 2.4: Nestabilní poloha pro $U = 6900$ V.



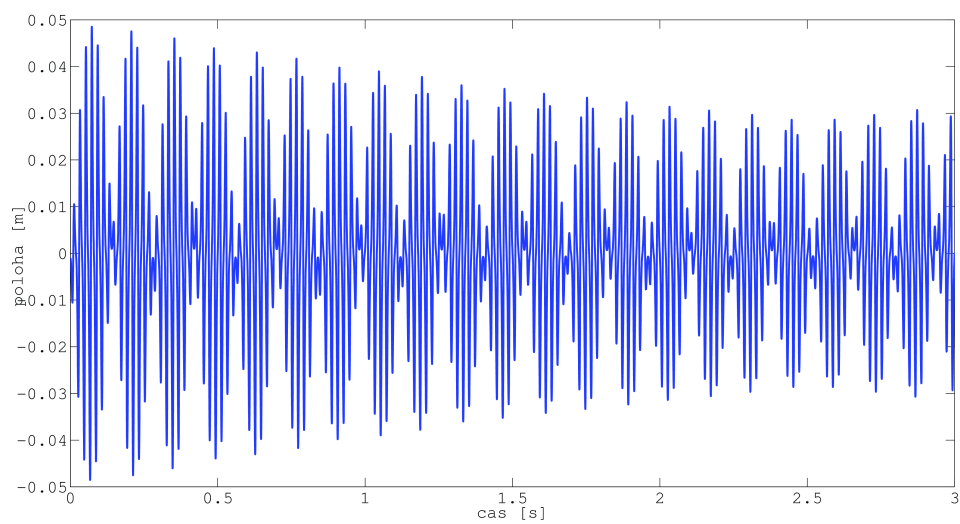
Obrázek 2.5: Předpovězená spodní hranice stability pro $U = 5690$ V.



Obrázek 2.6: Zpočátku ještě trochu stabilní řešení pro $U = 56855$ V, po delší době diverguje.



Obrázek 2.7: Předpovězená horní hranice stability pro $U = 57350$ V. Řešení není stabilní, diverguje téměř okamžitě.



Obrázek 2.8: Zajímavý jev pro $U = 57325$ V. Amplituda se zpočátku pomalu zmenšuje. Nakonec ale stejně začne divergovat (na delším časovém intervalu).

Kapitola 3

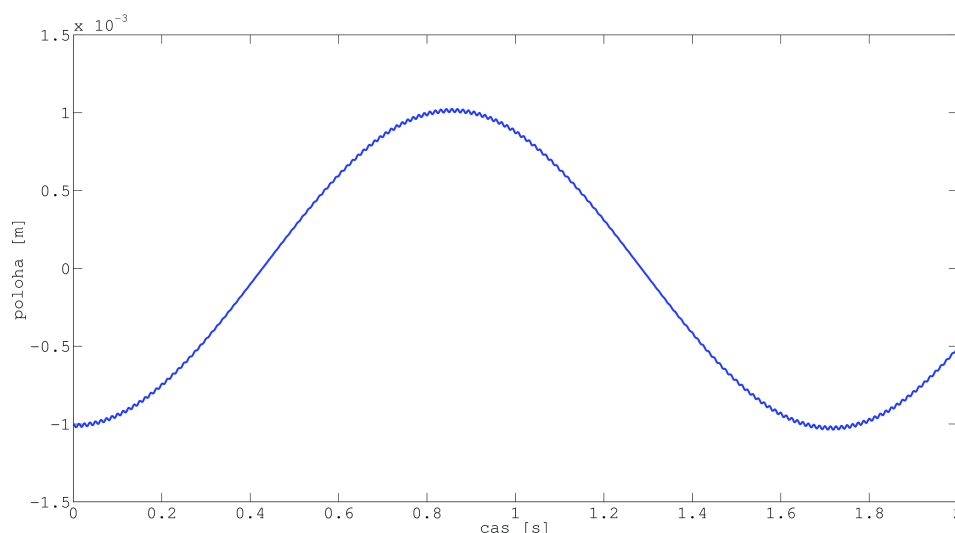
Princip

Podařilo se nám numericky spočítat pohyb částice v elektrickém poli a víme, jak najít parametry pro stabilní řešení. Teď bychom se ještě měli pokusit trochu hlouběji porozumět principu fungování pasti.

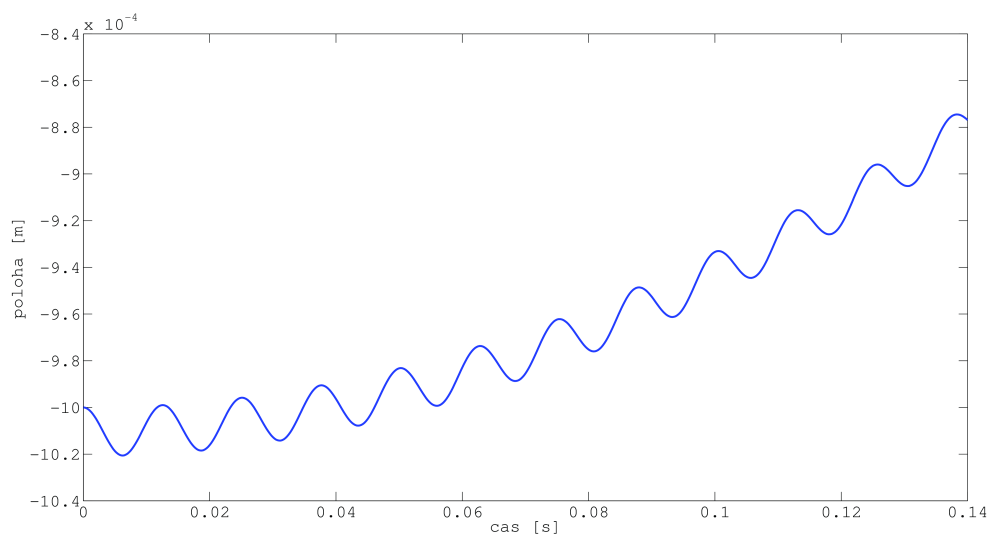
3.1 Názorné vysvětlení principu pasti

Elektrické pole v geometrickém středu (tedy $[x, y] = [0, 0]$, viz obrázek 1.3) je nulové a roste směrem k drátům.

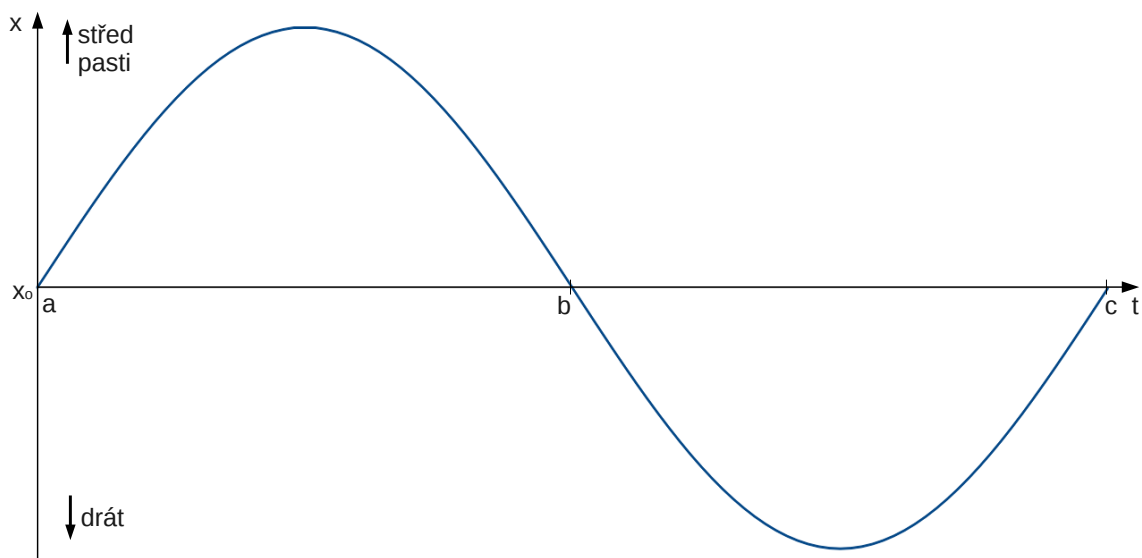
Předpokládejme, že se pohyb částice dá rozdělit na dvě části, makropohyb s frekvencí menší než je frekvence pole a mikropohyb s frekvencí pole, viz obrázky 3.1 a 3.2, kde jsou vykresleny numericky vypočtené grafy pro frekvenci $f = 80$ Hz. Na prvním z nich vidíme makropohyb, který je trochu zvlněný mikropohybem. Ten je mnohem lépe vidět na druhém obrázku, kde je pouze malý výřez začátku grafu 3.1.



Obrázek 3.1: Makropohyb pro frekvenci $f = 80$ Hz a časový interval $\delta t = 2$ s.



Obrázek 3.2: Detail začátku předchozího grafu pro časový interval $\delta t = 0,14$ s.



Obrázek 3.3: Jedna perioda mikropohybu v minimu polohy makropohybu. Částice se vyskytuje v oblasti mezi středem pasti a drátem, v okolí bodu x_0 .

Podívejme se teď na jednu periodu mikropohybu na začátku grafu 3.2, jemu odpovídající rovnovážnou polohu označme x_0 , viz obrázek 3.3.

V blízkém okolí bodu x_0 se dá pole považovat za téměř homogenní, ale střídavé. Částice je po dobu poloviny periody pole $\frac{1}{2f}$ urychlována směrem ven k drátům, druhou polovinu periody je naopak urychlována směrem do středu, proto vykonává pohyb na obrázku 3.3. Zdálo by se tedy, že efektivní síla, tj. vystředovaná síla elektrického pole, je ve výsledku nulová. Použili jsme zde ale příliš hrubou aproximaci. Pole „nad bodem“ x_0 je ve skutečnosti trochu slabší než „pod ním“. Vystředovaná síla přes časový interval $\langle a, b \rangle$ (viz obrázek 3.3) bude tedy menší a opačného směru než vystředovaná síla přes interval $\langle b, c \rangle$. Efektivní síla přes celou periodu tedy bude působit směrem do středu pasti.

Tato úvaha dobře funguje v okolí minim i maxim trajektorie makropohybu. V okolí středu pasti vypadá trajektorie částice jinak a tuto úvahu už tam nelze tak snadno aplikovat.

3.2 Pseudopotenciál

V předchozí podkapitole jsme došli k závěru, že vystředováním elektrické síly dostaneme přitažlivou sílu působící do středu pasti. Zkusme tento model posunout ještě kousek dál a vypočítat tzv. pseudopotenciál této síly. Toto označení je převzato z [3].

Předpokládejme opět, že pohyb se dá rozdělit do dvou částí, mikro- a makropohybu. Nejprve potřebujeme odhadnout amplitudu mikropohybu, předpokládejme tedy na chvíli, že v okolí bodu x_0 je elektrická síla konstantní. Pohybová rovnice (1.14) se pak zjednoduší na

$$\ddot{x} = -\frac{2QW}{m}x_0 \cos \Omega t \quad (3.1)$$

a její řešení je

$$x = \frac{2QWx_0}{m\omega^2} \cos \Omega t + Dt + E. \quad (3.2)$$

Předpokládejme $D = 0$ a $E = x_0$. Amplituda mikropohybu je $\frac{2QWx_0}{m\omega^2}$.

Do rovnice (1.14) vynásobené hmotností m dosadíme vztah (3.2) a získáme tak sílu závislou na poloze částice.

$$m\ddot{x} = F_x = -2QW \left(\frac{2QWx_0}{m\omega^2} \cos \Omega t + x_0 \right) \cos \Omega t \quad (3.3)$$

Nyní sílu vystředujeme přes jednu periodu τ pole.

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F dt \\ &= -2QW \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left(\frac{2QWx_0}{m\omega^2} \cos^2 \Omega t + x_0 \cos \Omega t \right) dt \\ &= -\frac{Q^2}{4m\omega^2} (2W)^2 2x_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pokusme se vyjádřit pseudopotenciál ψ ze spočtené efektivní síly (3.4).

$$\langle F \rangle = -\frac{d\psi}{dx_0}, \quad (3.5)$$

$$\psi = \frac{Q^2 W^2}{m\omega^2} x_0^2. \quad (3.6)$$

Nalezli jsme pseudopotenciál ψ . Všimněme si, že je závislý na druhé mocnině polohy, což připomíná potenciál harmonického oscilátoru $\frac{1}{2}kx^2$. V obecném případě lze pseudopotenciál vyjádřit jako

$$\psi = \frac{Q^2}{4m\omega^2} \left(\frac{du(x_0)}{dx_0} \right)^2; \quad u = Wx_0^2, \quad (3.7)$$

kde $\frac{du(x_0)}{dx_0}$ je gradient napětí. Pseudopotenciál je tedy přímo úměrný druhé mocnině gradientu napětí! V [3] je podobné odvození, autor se jej snažil podat trochu rigorózněji matematicky zapsané, ale principiálně jsou použity stejné myšlenkové postupy. Výsledek se shoduje s tím naším.

3.3 Ověření pseudopotenciálu

Periodický makropohyb charakterizovaný pseudopotenciálem můžeme v aproximaci považovat za harmonický. Zkusme tedy porovnat periodu kmitů odečtenou z grafů numerických výpočtů a periodu kmitů vypočtenou z pseudopotenciálu, kterou spočteme jako

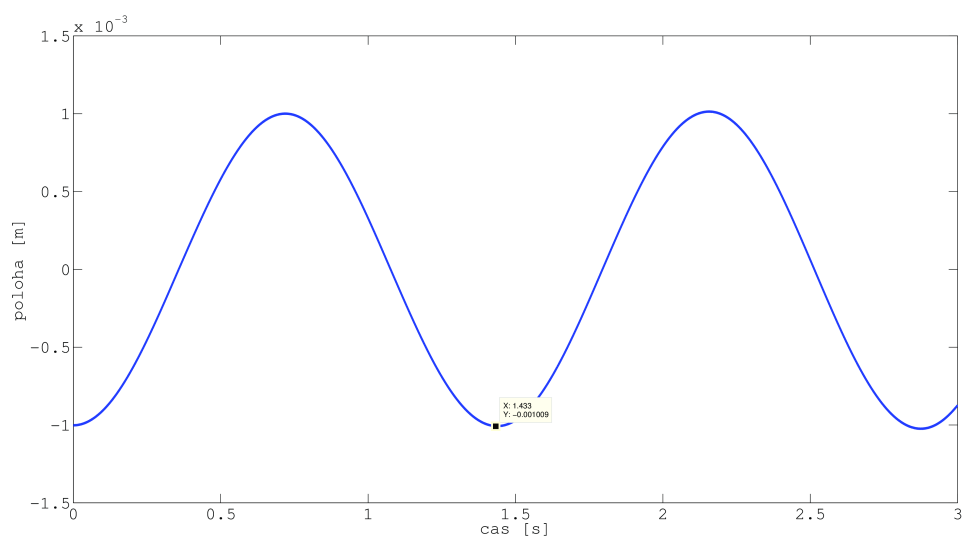
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi m \omega \sqrt{2}}{QW}, \quad (3.8)$$

kde tuhost k získáme porovnáním pseudopotenciálu a potenciálu harmonického oscilátoru.

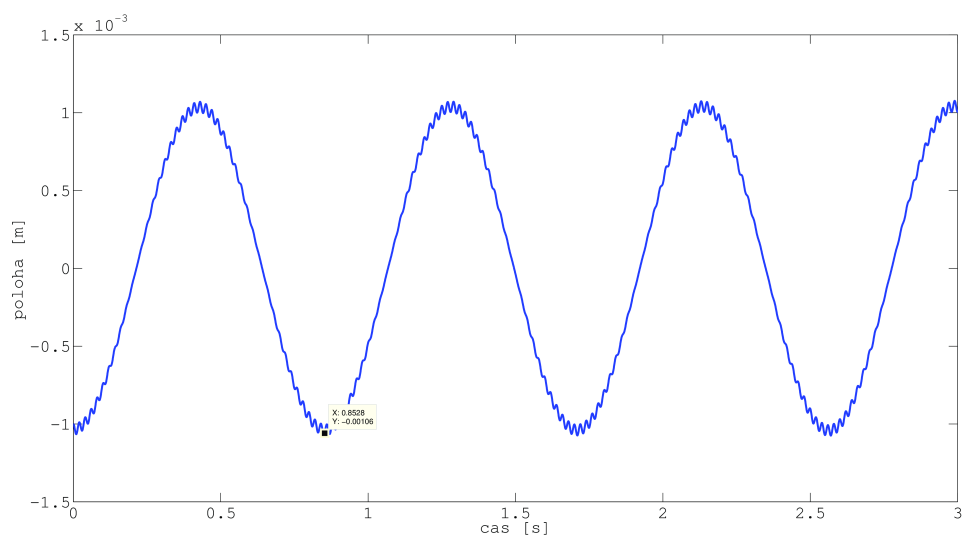
Připomeňme si, jakým způsobem jsme určovali jednotlivé parametry u numerických výpočtů. Parametry pole a rozměry pasti jsou $W = \frac{4U}{a^2 \ln \frac{r_0}{a}}$, $a = 5\sqrt{2}$ mm a $r_0 = 1$ mm. Náboj částice spočítáme jako $Q = 4\pi\epsilon_0 r^2 E_m k$, kde $E_m \doteq 3$ MV.m⁻¹ je průraznost vzduchu, $r = 50$ μm je poloměr koule a $k = 0,04$ je násobek horního odhadu náboje částice, a hmotnost částice jako $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$, kde $\rho \doteq 800$ kg.m⁻³. Dosazením do rovnice (3.8) dostaneme

$$T = \frac{\pi^2 f r a^2 \rho \left| \ln \frac{r_0}{a} \right| \sqrt{2}}{6U\epsilon_0 E_m k}. \quad (3.9)$$

Zkusme se podívat například na obrázek 3.1, kde byly použity hodnoty $U = 750$ V a $f = 200$ Hz. Spočtená perioda vychází $T = 2,28$ s, z grafu odečtená perioda pak je $T = (2,29 \pm 0,04)$ s. Popis pomocí pseudopotenciálu se shoduje s numerickými výpočty! Pro ověření provedeme výpočty ještě pro další dva případy. Na obrázku 3.4 je vykreslen graf pro $U = 3$ kV a $f = 500$ Hz. Vypočtená hodnota periody je $T = 1,43$ s, odečtená z grafu $T = (1,43 \pm 0,03)$ s. Obdobně na obrázku 3.5 je graf pro $U = 500$ V a $f = 50$ Hz. Vypočtená hodnota je $T = 0,86$ s, odečtená $T = (0,86 \pm 0,02)$ s.



Obrázek 3.4: Závislost polohy na čase pro hodnoty $U = 3$ kV a $f = 500$ Hz.



Obrázek 3.5: Závislost polohy na čase pro hodnoty $U = 500$ V a $f = 50$ Hz.

Kapitola 4

Viskozita a gravitace

Doposud jsme popisovali pohyb částice pouze v elektrickém poli. Tento model dobře funguje pro hmotnostní spektrometry a jiné Paulovy pasti, kde se částice pohybují většinou ve vakuu a měrný náboj je poměrně velký $\frac{Q}{m} \sim 10^7 \text{ C.kg}^{-1}$, tedy gravitace se dá zanedbat. Avšak náš experiment je ve vzduchu, kde se významně projeví viskozita, a měrný náboj částic je mnohem menší $\frac{Q}{m} \sim 10^{-4} \text{ C.kg}^{-1}$, a proto zde musíme započítat i gravitaci. Naše předchozí zkoumání nám pomohlo vytvořit si obrázek o dějích v pasti a teď ho pouze trochu upravíme a získáme informace o tom, jak bude vypadat náš experiment.

4.1 Pohybová rovnice

Nejprve musíme zjistit, jestli proudění kolem částic bude laminární nebo turbulentní. Reynoldsovo číslo se spočítá jako

$$R = \frac{vd}{\nu}, \quad (4.1)$$

kde v je rychlost částice, $d \doteq 10^{-4} \text{ m}$ je průměr částice, $\nu \doteq 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ je kinematická viskozita vzduchu. Průměrnou rychlost můžeme odhadnout z frekvence a amplitudy mikropohybu jako $v = 4af \doteq 0,3 \text{ m.s}^{-1}$ pro amplitudu přibližně $a \doteq 1,5 \text{ mm}$ (odhad z experimentu). Reynoldsovo číslo je tedy přibližně $R \doteq 2$, což je mnohem menší, než je hranice mezi laminárním a turbulentním prouděním (ta je řádově tisíce). Tedy proudění vzduchu kolem částic můžeme s dobrou přesností považovat za laminární. Pro jednoduchost budeme uvažovat kulový tvar prachových částic. Člen pohybové rovnice charakterizující viskozitu má tvar

$$F_v = -6\pi r\eta\dot{x}, \quad (4.2)$$

kde η je dynamická viskozita vzduchu. Díky linearitě členu můžeme opět rozložit sílu do dvou os a počítat pouze v jednom rozměru. Pohybová rovnice po vydělení hmotností m získá tvar

$$\ddot{x} = -\frac{2QW}{m}x \cos \Omega t - 6\pi \frac{r}{m}\eta\dot{x} - g, \quad (4.3)$$

kde r je poloměr kulové částice a W charakterizuje amplitudu pole.

4.2 Numerické řešení

K numerickému řešení pohybové rovnice budeme opět používat program Matlab. Dynamická viskozita vzduchu je $\eta = 17,1 \times 10^{-6}$ Pa.s, hmotnost částice opět odhadneme z jejího poloměru $r = 50 \mu\text{m}$ a hustoty $\rho \doteq 800 \text{ kg.m}^{-3}$ (odhad z experimentu). Pohybovou rovnici rozdělíme na dvě rovnice prvního řádu a přepíšeme soubor `paul.m`.

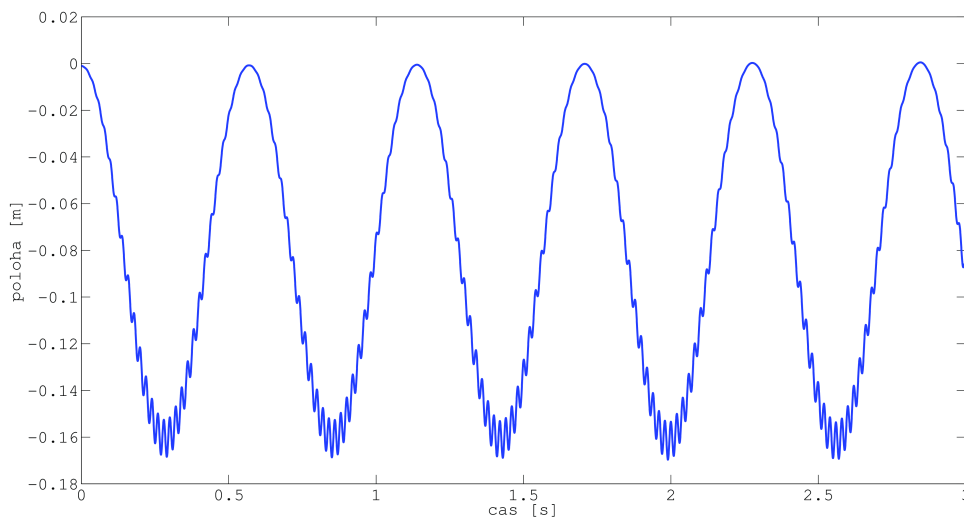
```
function xprime = paul(t,x,q);  
f=q(1); U=q(2); k=q(3); T=q(4); G=q(5);  
xprime=[x(2); -38.4*T*x(2)+163*U*k*x(1)*cos(2*pi*f*t)-9.81*G];
```

Přibýlo zde několik parametrů, projděme si znovu jejich označení: f je frekvence pole, U napětí, k násobek horního odhadu náboje. Parametry T a G nabývají hodnotou pouze 0 nebo 1, jejich funkce je „zapínat“ a „vypínat“ přidané síly, parametr T „vypíná“ viskózní člen a G zase gravitaci.

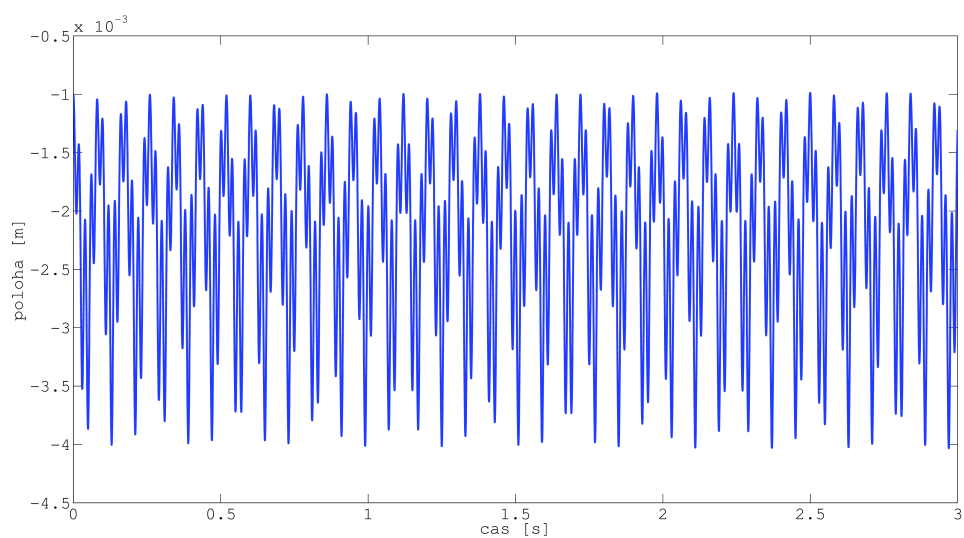
Těž musíme trochu pozměnit příkaz obsahující hodnoty parametrů. Zbylé příkazy zůstávají stejné. Pro přehlednost jsou zde vypsány všechny.

```
tspan = 0:0.00025:3  
x0=[-0.001 0]  
q=[50 750 0.04 0 0]  
[t,x]=ode45(@paul,tspan,x0,[],q)  
plot(t,x(:,1))
```

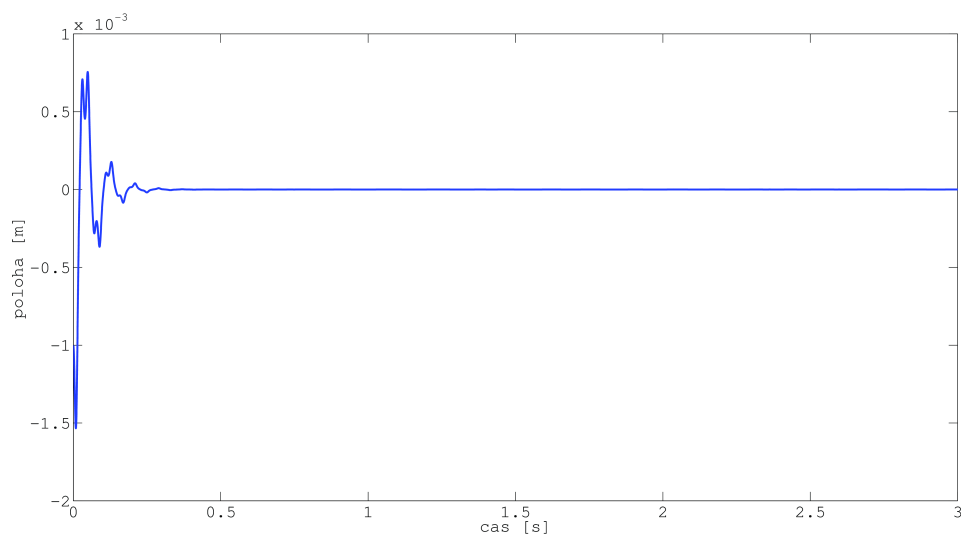
Zkusme si teď vykreslit graf pro stejné hodnoty, jako jsme zvolili na začátku, ale s gravitací, viz obrázek 4.1. Pro připomenutí se může čtenář podívat na obrázek 1.6, kde je to stejné bez gravitace.



Obrázek 4.1: Graf závislosti polohy na čase pro hodnoty $T = 0$, $G = 1$, tedy s gravitací.



Obrázek 4.2: Graf pro $k = 0,26$ a s gravitací.

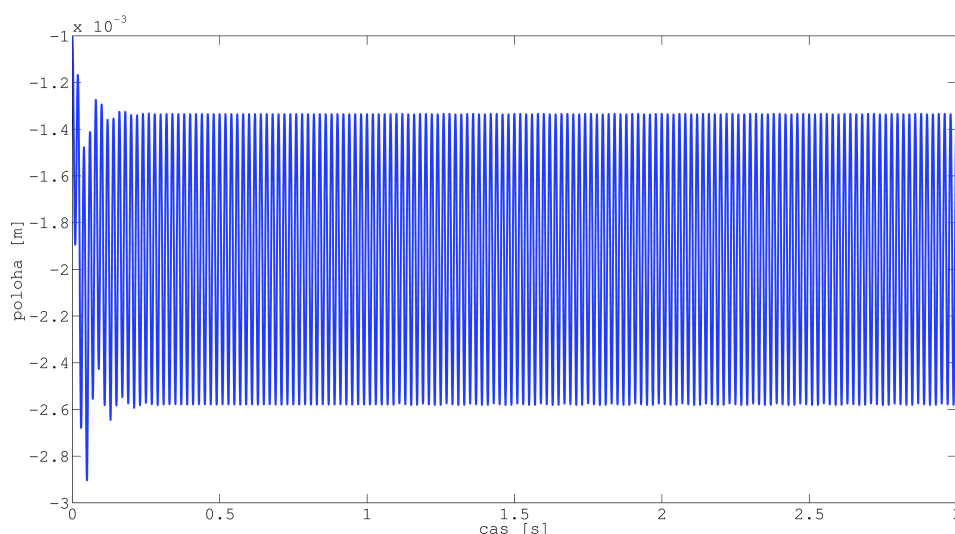


Obrázek 4.3: Graf závislosti polohy na čase s viskozitou a bez gravitace, tedy $T = 1$, $G = 0$.

Gravitace posune rovnovážnou polohu níže. A dost výrazně. Rovnovážná poloha je přibližně 7 cm pod polohou spodních drátů, tedy mimo past. Tento problém se dá vyřešit například tím, že zvětšíme náboj na částici třeba 6,5-krát, viz obrázek 4.2. S touto hodnotou, $k = 0,26$, budeme počítat ve všech následujících grafech, pokud nebude řečeno jinak.

„Zapneme“-li pouze viskozitu, částice se dostane po určité době do středu pasti, kde je pole nulové a kmity se zatlumí, viz obrázek 4.3.

Konečně, budeme-li počítat stále pro stejné hodnoty, ale s gravitací i s viskozitou, začne se dít něco zajímavějšího.



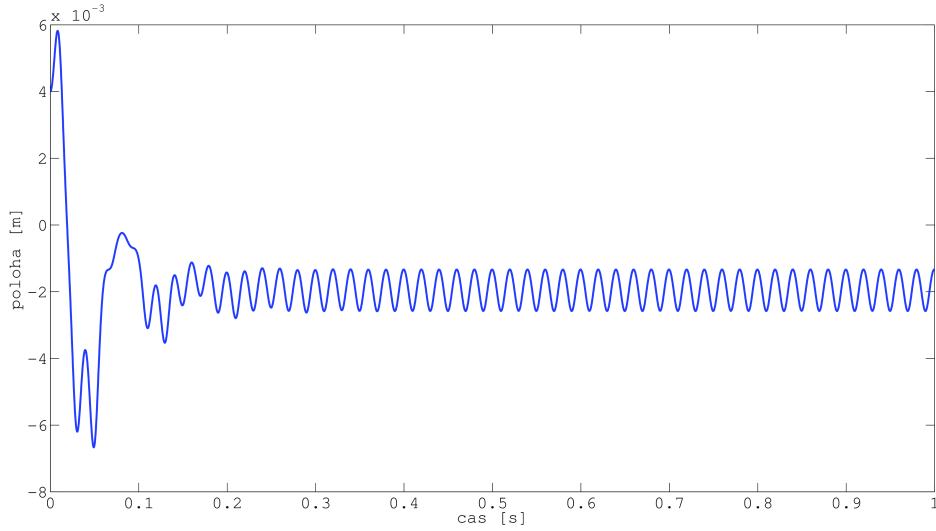
Obrázek 4.4: Graf závislosti polohy na čase s gravitací i viskozitou $T = 1, G = 1$.

Hledíme, co se stalo! Pohyb částice po ustálení již není rozlišitelný na makropohyb a mikropohyb. Částice jednoduše osciluje kolem rovnovážné polohy s frekvencí pole. Klasický případ tlumeného oscilátoru s budící silou.

I když je pohyb částice uvnitř pasti po zavedení viskozity a gravitace odlišný, tak mnohé z toho, co jsme doposud vymysleli, zůstává zachováno. Například princip fungování pasti se zjednodušil v tom, že již nemusíme předpokládat oddělitelnost makro- a mikropohybu, protože velké oscilace se velmi rychle zatlumí a zůstanou pouze ty malé. Na druhou stranu viskozita zajistí malý fázový posuv kmitání částice vůči budící síle, tedy úvahy o silách způsobující urychlování částice musíme trochu pozměnit. Další postup vysvětlení už je stejný jako v podkapitole 3.1.

4.3 Pseudopotenciál

Než se částice ustálí v rovnovážné poloze, tak vykonává i oscilace s frekvencí nižší, než je frekvence pole f , viz obrázek 4.5. To naznačuje, že se můžeme pokusit najít



Obrázek 4.5: Graf závislosti polohy na čase s gravitací i viskozitou $T = 1, G = 1$, pro počáteční polohu $x_0 = 4$ mm a časový interval $\delta t = 1$ s.

pseudopotenciál i v tomto případě. Postup je analogický jako v podkapitole 3.2, jen musíme přidat viskózní člen. Gravitaci pro zjednodušení uvažovat nebudeme, pouze vezmeme předpoklad, že posune rovnovážnou polohu o něco níže.

Nejprve odhadneme amplitudu mikropohybu kolem rovnovážné polohy x_0 , tedy opět na chvíli uvažujme konstantní amplitudu budící síly v malém okolí bodu x_0 . Pohybová rovnice se zjednoduší na

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = -\alpha x_0 \cos \omega t, \quad (4.4)$$

kde

$$\gamma = \frac{6\pi\eta r}{m}, \quad \alpha = \frac{2QW}{m}. \quad (4.5)$$

Řešení homogenní rovnice, tj. (4.4) bez pravé strany, je

$$x_H(t) = Be^{-\gamma t} + D, \quad (4.6)$$

kde předpokládejme $D = x_0$. Člen $Be^{-\gamma t}$ se velmi rychle zatlumí, je pro nás nezajímavý. Řešení nehomogenní rovnice očekáváme ve tvaru

$$x_N = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (4.7)$$

Dosazením do (4.4) a porovnáním koeficientů u exponenciálních funkcí získáme

$$C_1 = \frac{\alpha x_0}{2} \frac{\omega^2 + i\gamma\omega}{\omega^4 + \gamma^2\omega^2}, \quad C_2 = \frac{\alpha x_0}{2} \frac{\omega^2 - i\gamma\omega}{\omega^4 + \gamma^2\omega^2}. \quad (4.8)$$

Řešení si vyjádříme ve tvaru $A \cos(\omega t + \varphi)$, spočteme A i φ a dosadíme do nich (4.8).

$$A = \sqrt{2} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{\alpha x_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}}, \quad (4.9)$$

$$\varphi = \arctan i \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = -\arctan \frac{\gamma}{\omega}, \quad (4.10)$$

kde A je hledaná amplituda mikropohybu.

První člen řešení homogenní rovnice se po nějaké době zatlumí a z celkového řešení zbude

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0. \quad (4.11)$$

Pro další odvozování se nám bude též hodit znát

$$\cos \varphi = \frac{\alpha x_0}{A \omega^2} \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}. \quad (4.12)$$

Síla $F = F(x, t)$ působící na částici se pak spočítá jako

$$F = m\gamma A \omega \sin(\omega t + \varphi) - m\alpha A \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) - \alpha x_0 \cos \omega t. \quad (4.13)$$

Po vystředování přes periodu pole τ první a poslední člen vypadne a zbude

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= -\frac{\alpha m A}{\tau} \int_0^\tau (\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \cos \varphi) dt \\ &= -\frac{\alpha m A}{2\tau} \cos \varphi \\ \frac{d\psi}{dx_0} &= -\frac{2Q^2 W^2 x_0}{m\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

odtud spočteme pseudopotenciál ψ

$$\psi = \frac{Q^2}{4m\omega^2} \left(\frac{du}{dx_0} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}, \quad \text{kde } u = Wx_0^2. \quad (4.15)$$

Během výpočtu jsme si mohli povšimnout, že amplituda mikropohybu je podobná případu bez viskozity, jen je zmenšená o faktor $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}}$. V extrémním případě, když by částice byly umístěny například v medu, by se příliš nehýbaly, koeficient γ by byl příliš velký a kmity zanedbatelné. To odpovídá i nalezenému řešení. Podobně je na tom i pseudopotenciál, který je zmenšený o druhou mocninu stejného koeficientu.

V době, kdy budící síla mění směr, je viskózní síla největší a obráceně. Jsou vůči sobě fázově posunuté. Proto se i u polohy vyskytl fázový posuv φ .

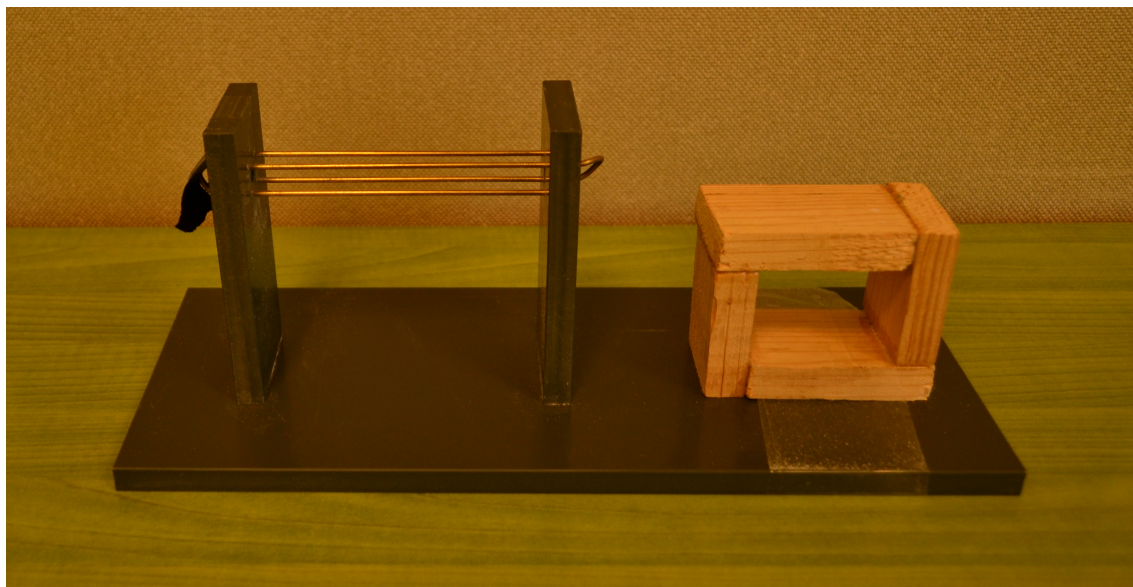
Kapitola 5

Experiment

Teoreticky toho už o chování částic víme poměrně hodně, tak bychom se mohli konečně vrhnout na experiment!

5.1 Výstavba

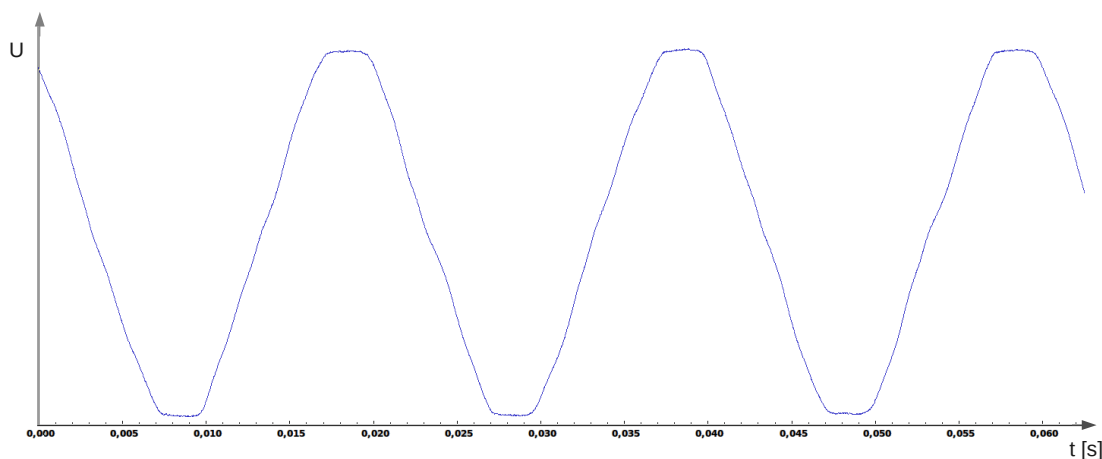
Co budeme potřebovat? Tak určitě by se hodila past. Ta naše je vyrobena ze čtyř mosazných drátů o průměru 2 mm umístěných do rohu pomyslného čtverce o hraně 1 cm tak, že každé protější dva dráty jsou propojeny, viz obrázek 5.1. Stojan je vyroben z PVC, uprostřed již zmíněných pomyslných čtverců je otvor.



Obrázek 5.1: Past používaná k experimentům.

Použitý zdroj napětí je transformátor z mikrovlnné trouby, který zesiluje napětí v poměru 2000 : 230. Ten je napájen transformátorovým regulátorem s rozsahem 0 – 230 V, tedy efektivní hodnotu napětí na pasti je možné regulovat v rozmezí 0 – 2000 V. Tyto dva prvky nejsou lineární, výstupní signál se pouze blíží ideálnímu

sinusovému průběhu, viz obrázek 5.2. Pro bezpečnost jsou na výstupu umístěny vysokonapěťové výkonové rezistory s celkovým odporem $4,5 \text{ M}\Omega$. K zachytávání částic jsem většinou používal efektivní napětí v rozmezí přibližně $1000 - 1500 \text{ V}$. Frekvence je síťová, tedy 50 Hz .



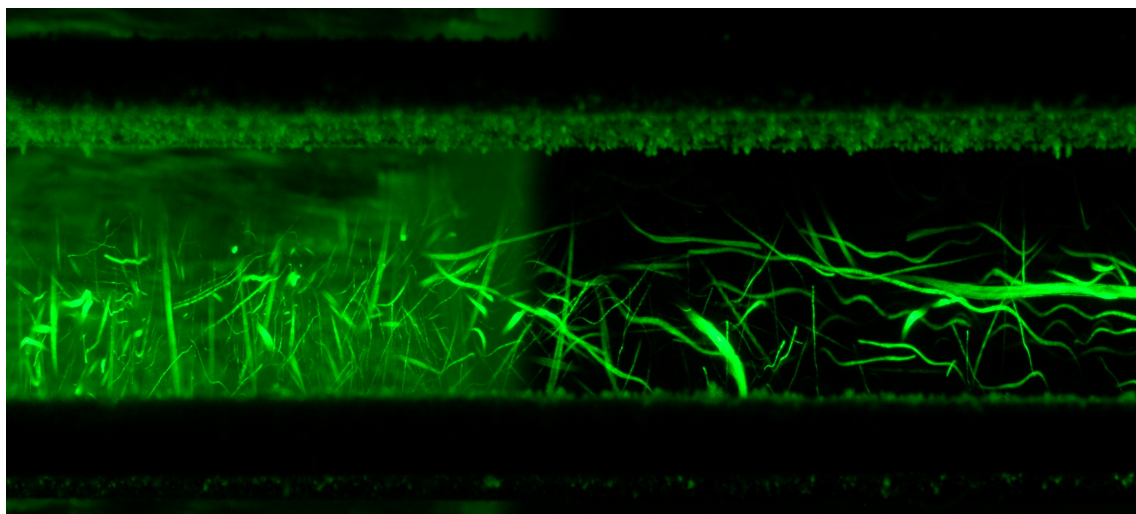
Obrázek 5.2: Výstupní signál zdroje, který jsem měřil pomocí zvukové karty. Pro nás je důležité, jak vypadá výstupní signál, nepotřebujeme vědět, jaké jsou hodnoty zjištěné závislosti, proto svislá osa není naškálována. Byla by to technická komplikace navíc. Měřeno pro efektivní napětí $U = 1255 \text{ V}$.

V teoretické části jsme počítali s tím, že na dvojicích drátů je potenciál $\pm U \cos \omega t$. V experimentu je ale jedna dvojice drátů uzemněna, na druhé je potenciál $2U \cos \omega t$ (za předpokladu, že experimentální vybavení funguje správně). Avšak potenciály uvnitř pasti při těchto dvou situacích si jsou téměř ekvivalentní, rozdíl nalezneme až vně pasti.

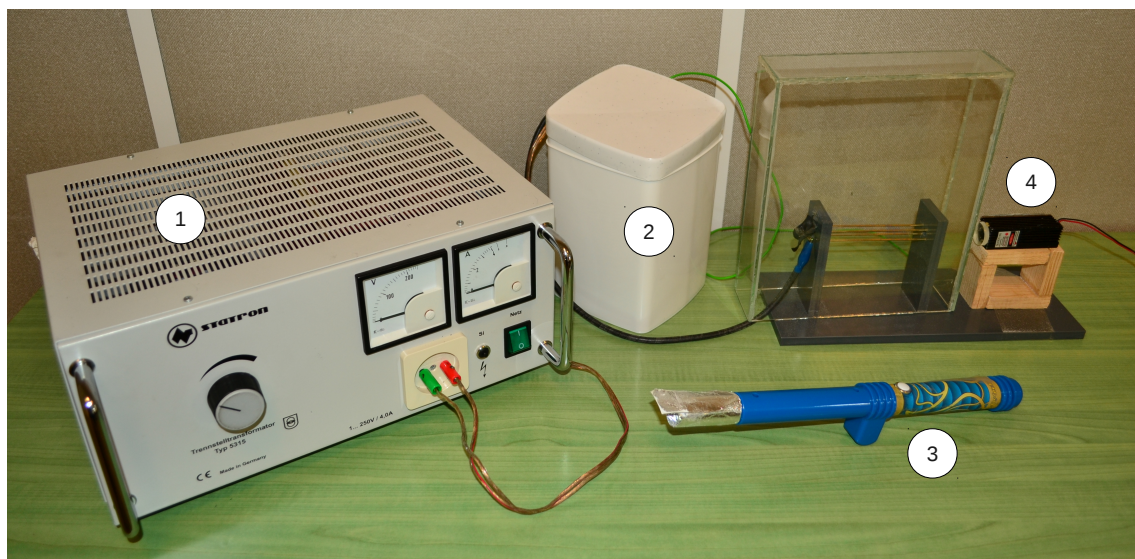
Jelikož jsou prachové částice velmi malé a nejsou téměř vidět, je potřeba si je zviditelnit. K tomu nám poslouží zelený 50 mW laser s vlnovou délkou 532 nm , umístěný na dřevěném podstavci. Ten svítí skrze zmíněné otvory uprostřed pomyslných čtverců, tedy osvětluje střed pasti po celé délce. K laseru je přilepena rozptylka vhodné mohutnosti, abychom osvětili větší prostorový úhel. Na druhé straně je přilepen kousek černé látky, která alespoň částečně pohlcuje prošlé záření.

Pro experiment je důležité, aby proudění vzduchu skrze past bylo co nejmenší. Z toho důvodu je past přikryta skleněným akváriem, které tento nežádoucí jev velmi omezí.

K nabíjení prachových částic využijeme *Fly Stick Van de Graaff Levitation Wand*, což je hůlka obsahující malý Van de Graaffův generátor. Na alabal umístěný na jejím konci nasypeme vybrané prachové částice, které se po zapnutí generátoru nabíjí a díky elektrostatické síle začnou vystřelovat směrem od hůlky. Tento proces je zachycen na videu 1, případně velmi hezké je zpomalené nabíjení zachycené na videu 2. Nabíjení je též vyfotografováno na obrázku 5.3. Celé experimentální vybavení je pak na obrázku 5.4.



Obrázek 5.3: Pohled shora na nabíjení prachových částic pomocí levitační hůlky. Světlý podklad v levé části obrázku je alobal, na němž je umístěna polohrubá mouka. V horní a dolní části obrázku jsou vidět dráty, na nichž se ochotně drží mouka.



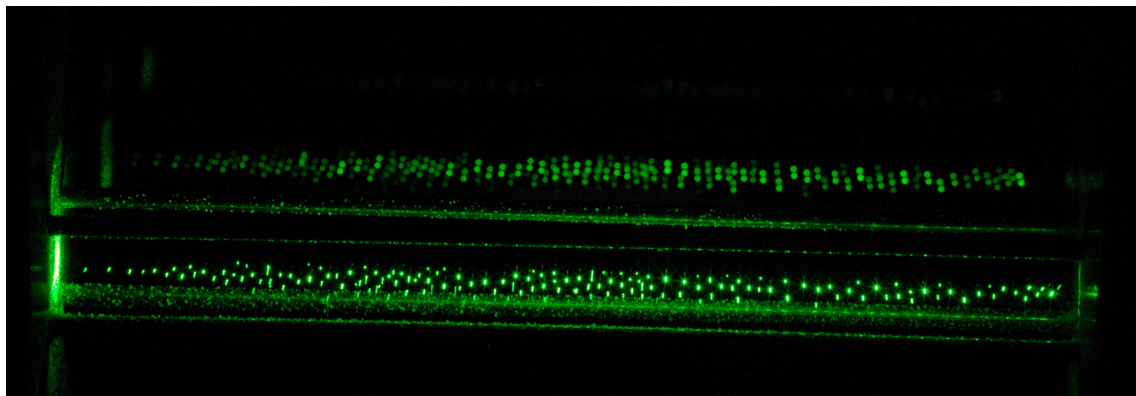
Obrázek 5.4: Celé experimentální vybavení. 1) Transformátorový generátor, 2) plastová krabice obsahující transformátor z mikrovlnné trouby, 3) levitační hůlka, 4) zelený laser o vlnové délce 532 nm.

Většina videí byla zachycena fotoaparátem CASIO EXILIM EX-FH20, který umožňuje mimo jiné natáčet při snímkové frekvenci 210fps, 420fps a dokonce 1000fps. S rostoucí snímkovou frekvencí však klesá kvalita videa. Všechna videa se pak přehrávají rychlostí 30fps.

A jaké prachové částice se dají použít? Fantazii se meze nekladou, vyzkoušel jsem několik různých druhů, nakonec se nejvíce osvědčila polohrubá mouka, jejíž rozměry částíček jsou v rozmezí přibližně 0,01 – 0,5 mm. Zajímavé je, že se v pasti zachytávají částičky vždy podobné velikosti (tedy i hmotnosti) v závislosti na nastaveném napětí. Z pasti máme zároveň i takový trochu nedokonalý hmotnostní spektrometr! Velikost zachycených částíček se pohybuje kolem 0,1 mm. Ve výpočtech jsme proto používali koule o poloměru $r = 50 \mu\text{m}$, což je polovina zjištěného průměrného rozměru částíček. K zjištění rozměrů polohrubé mouky jsem použil mikroskop.

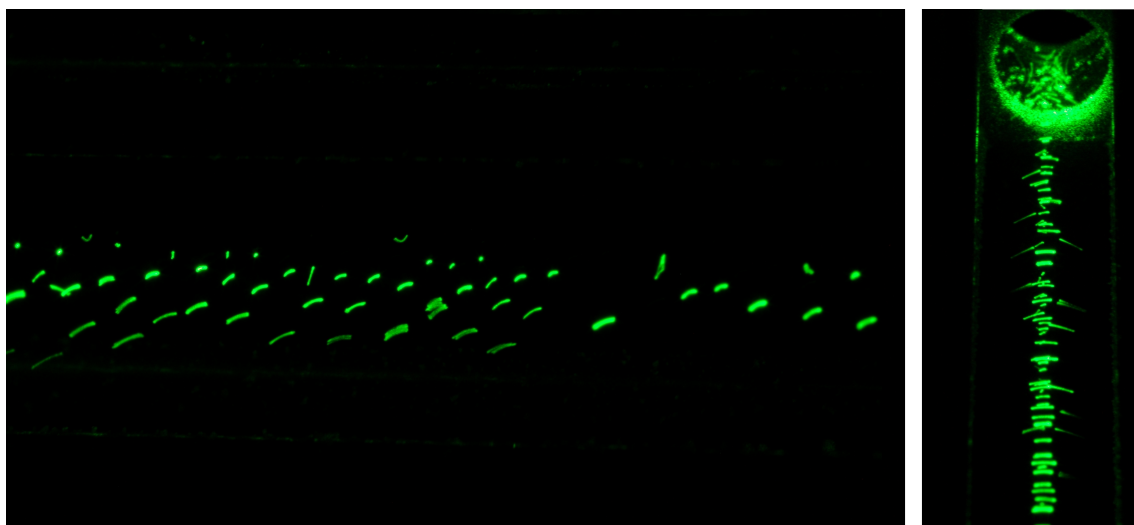
5.2 První seznámení a porovnání s teorií

Po nabití a zachycení mouky se nám naskytne pohled jako je na obrázku 5.5:



Obrázek 5.5: Nejníže je chycená mouka mezi dráty, uprostřed a nahoře obrázku pak vidíme odrazy na stěnách akvária.

Při bližším zkoumání spatříme zelené čáry, viz obrázek 5.6. Jsou to pohybující se částice, které lidské oko již nestíhá sledovat, a proto jsou rozmazané. Nadále budeme takto chycenou částici označovat jako „živou“. „Mrtvá“ částice pak bude ta, která již vyletěla z pasti, případně se zachytila na jednom z drátů. Proces, kdy se z „živé“ částice stane „mrtvá“, budeme dále nazývat „umírání“.

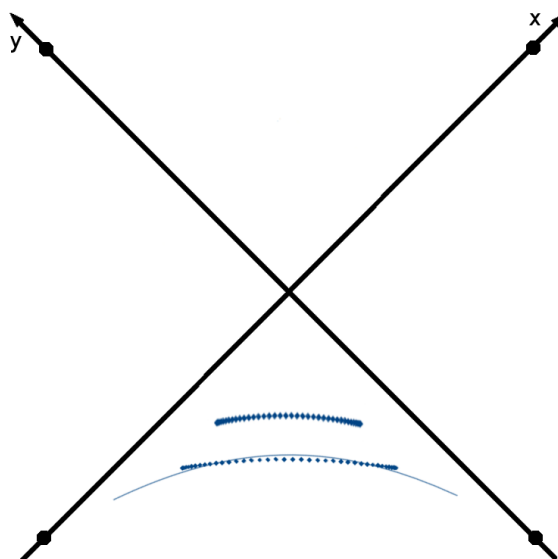


Obrázek 5.6: Pohybující se částice. V levé části pohled mírně zprava, při pozorném pohledu můžeme spatřit i dráty, a v pravé šikmo shora.

Všimněme si hned několika věcí:

- Částice se vyskytují v různých výškách. Měrný náboj $\frac{Q}{m}$ tedy bude pro každou z nich trochu jiný.
- Většina částic je zachycena ve spodní části pasti, protože je tam stáhne gravitace. Některé se ale drží poblíž úhlopříček a některé se dokonce udrží i v horní polovině pasti. Pravděpodobně je tam vytlačí ostatní nabitě částice elektrostatickou silou.
- Délka trajektorie je přímo úměrná její vzdálenosti od středu pasti, viz obrázek 5.7. Blíže středu pasti působí pole menší silou na zrníčka, ta se pak pohybují pomaleji a urazí tak kratší dráhu.
- Pokud vykreslíme do grafu hodnoty spočtené z numerických výpočtů pro osu x a pro osu y , které jsou fázově posunuté o půl periody, dostaneme obrázek 5.7. Vidíme, že teoreticky i experimentálně získané trajektorie jsou si podobné.
- Možná čtenáře napadne, že by se částice mohly pohybovat po siločarách. Na obrázku 5.7 je vložena část siločáry. Částice ji neopisuje, ale kříží. Domnívám se, že to způsobuje setrvačnost částíček mouky.

Z numerických výpočtů také víme, že by částice měly kmitat kolem rovnovážné polohy s frekvencí pole, tedy 50 Hz. Na videu 3 je sedmkrát, na videu 4 dokonce čtrnáctkrát zpomalená „živá“ částice. Při přehrávání videí po snímcích je možné odečíst frekvenci kmitání částic. Ta vychází velmi přesně 50 Hz, tedy tato předpověď se vyplnila.



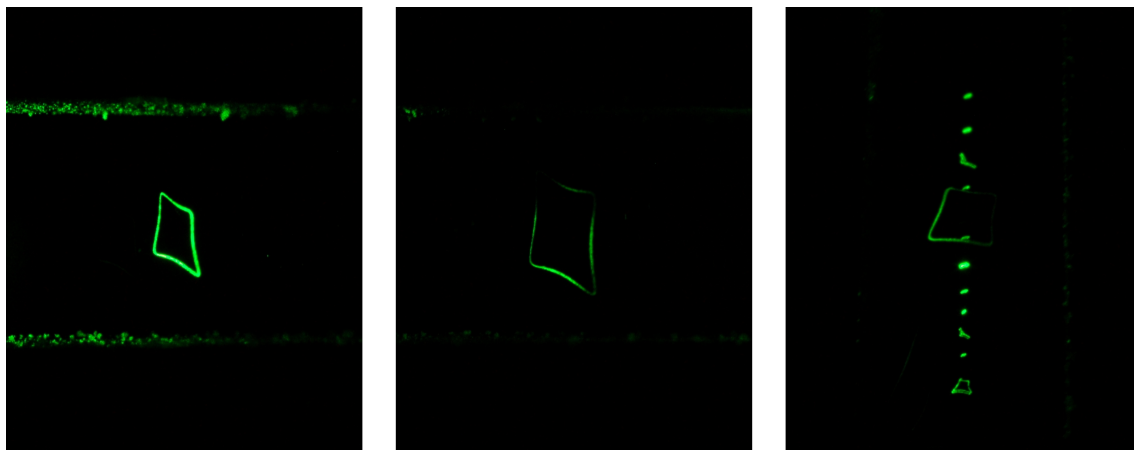
Obrázek 5.7: Několik bodů dvou trajektorií částice a část siločáry.

Máme za sebou první seznámení s pastí, podívejme se teď na video 5. Uvidíme na něm nabíjení, s tím už jsme se setkali výše, jevy v průběhu experimentování probereme v dalších podkapitolách, teď se zaměříme na „umírání“ chycených částic. Při snižování napětí klesá efektivní přitažlivá síla pole, zatímco gravitační zůstává stále stejně velká. Částice pak klesají a když se dostanou příliš nízko, „umřou“. Pokud při nabíjení máme na pasti nastavené napětí například 1000 V, první částčky začnou vypadávat přibližně při 950 V, tedy velmi brzo, a poslední částice se v pasti drží přibližně do 230 V. Podařilo se mi zachytit i zrnko, které vypadlo až při přibližně 185 V efektivního napětí.

Zde by mohl čtenář položit otázku, zda by tedy nestačilo přivést na past pouze síťové napětí 230 V. Zkoušel jsem to na této pasti a nepodařilo se mi chytit žádnou částici. Při nabíjení získají poměrně velkou hybnost a efektivní síla pole není dostatečně velká, aby je zachytila. K úspěchu by bylo potřeba zmenšit rozměry pasti, ale pak by byly veškeré efekty menší a hůře pozorovatelné. Druhá možnost je zmenšit rozměr či hustotu částic, případně zvýšit náboj, tzn. nalézt jiný způsob nabíjení.

5.3 Čtverec

Začneme-li zvyšovat napětí v pasti s již chycenými částicemi, může vzniknout tvar na obrázku 5.8:



Obrázek 5.8: Útvar, který vznikne zvyšováním napětí. Pro svoji podobnost ho nazvěme čtverec.

Pro svoji podobnost ho budeme označovat jako čtverec. Je to útvar na rozmezí „života“ a „smrti“ chycené částice. Může existovat pouze na poměrně malém intervalu efektivního napětí. Zvětšením napětí se roztáhne tak moc, že „umře“, zmenšením napětí začne opět normálně „žít“. Domnívám se, že vzniká díky setrvačnosti částice. Pokud „živá“ částice získá příliš velkou rychlost, dostane se díky setrvačnosti přes pomyslnou úhlopříčku pasti spojující dva protější dráty a tam „skočí“ na jinou trajektorii. Tak to dělá pořád dokola a díky tomu vykonává tento pohyb.

Pod pojmem točící se čtverec budeme dále uvažovat částici opisující svým pohybem tento tvar.

Na videu 6 je čtrnáctkrát zpomalený pohyb čtverce. Všimněme si, že frekvence oběhu čtverce je poloviční než frekvence pohybu „živé“ částice. To se dá jednoduše vysvětlit tím, že čtverec musí vykonat čtyři „obloučky“, kdežto „živé“ částici stačí dva.

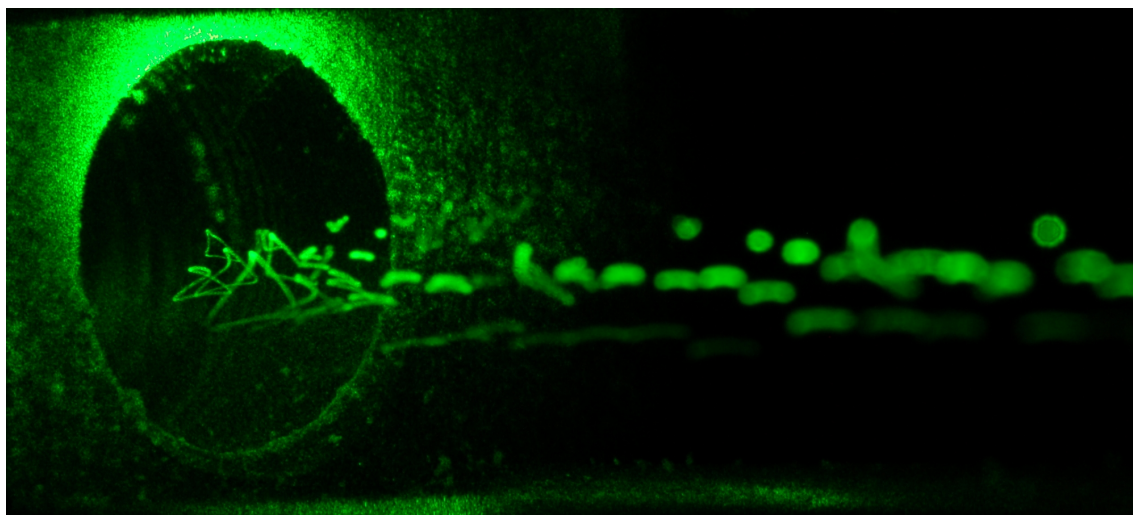
Na videu 7 vidíme v pravé části čtyři čtverce. Ten nejvíce vlevo se točí na opačnou stranu než zbylé tři. Druhý zprava je fázově posunutý o půl otočky oproti svým sousedům. To se dá vysvětlit tím, že každý čtverec vznikl v jiný okamžik, nemusí se tedy točit synchronizovaně. Pokud se točí jedním směrem, mohou se pohybovat buď s nulovým posuvem fáze nebo s posuvem o půl otočky. K tomuto závěru se dá dojít rozmyšlením jejich vzniku. Fázový posuv o čtvrt otočky pro částice se stejnou polaritou náboje není možný.

Této znalosti využijeme při analyzování videa 8, kde zprava vyjíždějící čtverec projíždí skrze druhý a do třetího naráží. Projet skrze sebe mohou tehdy, když se budou točit stejným směrem a budou vůči sobě posunuty o půl otočky, viz video 9. Jak jsem ale objevil na videu 10, stejná situace pravděpodobně nastane, i když se točí proti sobě! To není zcela zřejmý výsledek „srážky“. Na videu 11 se v levé části

pohybují dva menší čtverce. Zdá se, že se zprvu od sebe odráží, avšak pak jeden náhle „vyroste“, pravděpodobně kvůli změně napětí, a projedou skrze sebe. Jediný případ, kdy se od sebe mohou odrazit, je tehdy, když jsou čtverce stejně velké, otáčí se stejným směrem a nejsou vůči sobě fázově posunuté.

5.4 Trojúhelník

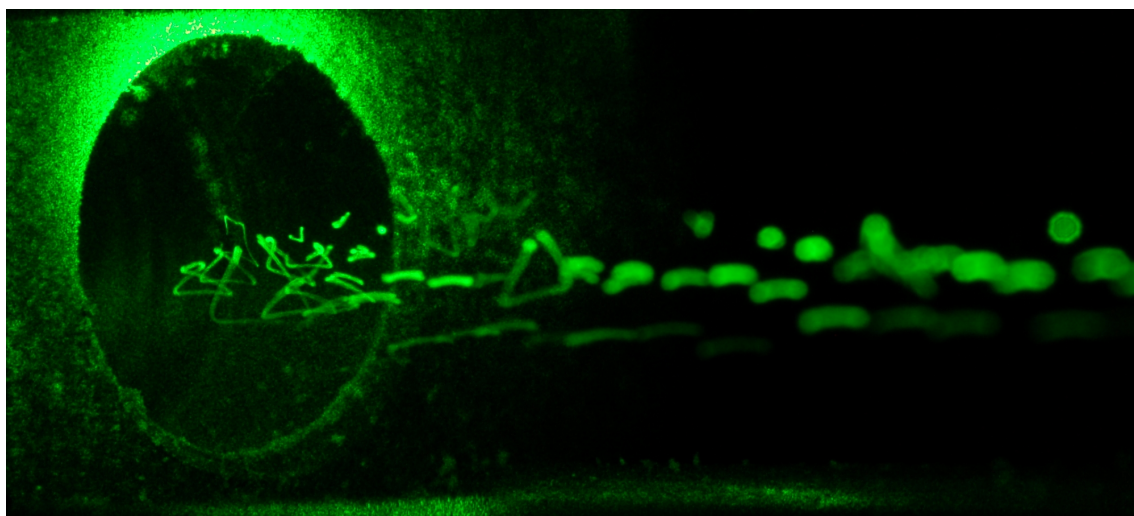
V pasti se může objevit i další zajímavý útvar, viz obrázek 5.9:



Obrázek 5.9: Útvar existující v poměrně malém rozsahu napětí mezi „živou“ částicí a čtvercem.

Pro svoji podobnost jej budeme dále nazývat trojúhelník. Vzniká na poměrně malém rozsahu napětí mezi „živou“ částicí a čtvercem. Je obtížné je vyrobit uprostřed pasti, ale jak je vidět na obrázku 5.9, tak na krajích se jim „daří“ poměrně dobře.

A jakým způsobem se pohybuje částice, aby vykreslila trojúhelník? Jsou dvě možnosti. Může to být „pokažený“ čtverec, jehož vrchní strana je velmi krátká a tvoří tak horní „vrchol“ trojúhelníku, kde částice chvíli téměř stojí, viz obrázek 5.10 úplně nalevo, případně video 12, případně ještě více zpomalené video 13. Nebo je to nedokončený trojúhelník, kde se částice přiblíží k hornímu vrcholu trojúhelníku a pak se vrátí zpět po stejné trajektorii, po které „přišla“. Viz obrázek 5.10 třetí zleva, případně nezaostřený útvar uprostřed obrázku.



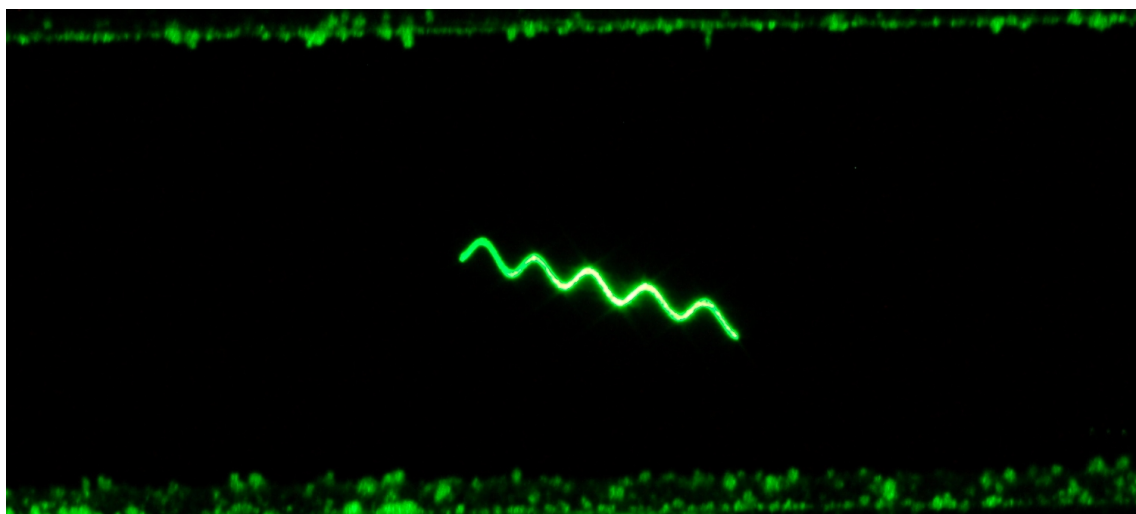
Obrázek 5.10: Dva způsoby pohybu částic vykreslujících trojúhelník. Úplně nalevo je „pokažený“ čtverec, třetí zleva a nezaostřený útvar uprostřed obrázku je nedokončený trojúhelník.

5.5 Vlnky

Na prvních dvou videích, kde bylo zachyceno nabíjení mouky, byl vidět jeden zajímavý jev. Pokud se k pasti přiblíží nabitý konec hůlky, rovnovážná poloha kmitů nad ní se posune výše, ale na druhé straně pasti zůstane ve stejné úrovni jako předtím. Vznikne zde tedy pomyslný „kopce“, ze kterého částice „rády sjíždějí dolů“. Přitom jsou hnány především třemi silami:

- gravitační,
- vystředovaná elektrická síla od drátů působí do středu pasti, tedy pokud jsou částice nad středem, jsou tlačeny dolů „z kopce“,
- elektrostatická síla od konce nabitě hůlky je odpuzuje od ní, pokud se částice již nad ní nenachází, průmět do směru rovnoběžného s dráty je nenulový.

To má za následek relativně velké zrychlení a následně i rychlost částic ve směru rovnoběžného s dráty. Složením tohoto pohybu a kmitání částic v rovině kolmé na dráty vznikne další útvar, který pro svoji podobnost budeme nazývat vlnkou, viz obrázek 5.11.



Obrázek 5.11: Spojením pohybu ve směru rovnoběžném s dráty a kmitání ve směru kolmém na ně získáme nový útvar, vlnky.

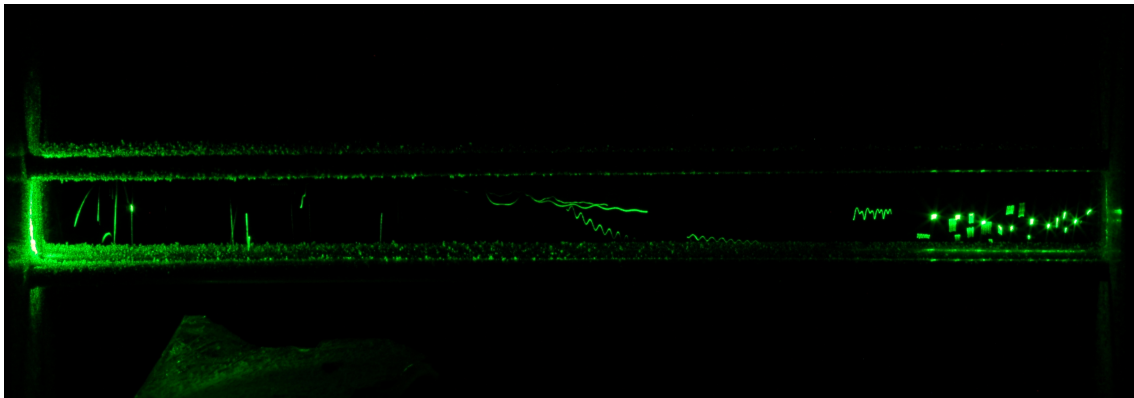
Získali jsme tím v podstatě závislost polohy na čase! Ta se přibližně shoduje s numerickými výpočty.

Obdobný jev nastane i tehdy, když k pasti přiblížíme vybitý konec hůlky, kdy se k ní částice začnou elektrostatickou silou přitahovat a nakonec i opustí past. Oba tyto jevy jsou vidět na videu 14. Na jeho konci se mi podařilo omylem zkratovat past, veškeré napětí pak bylo na ochranných rezistorech a částice volně spadly dolů.

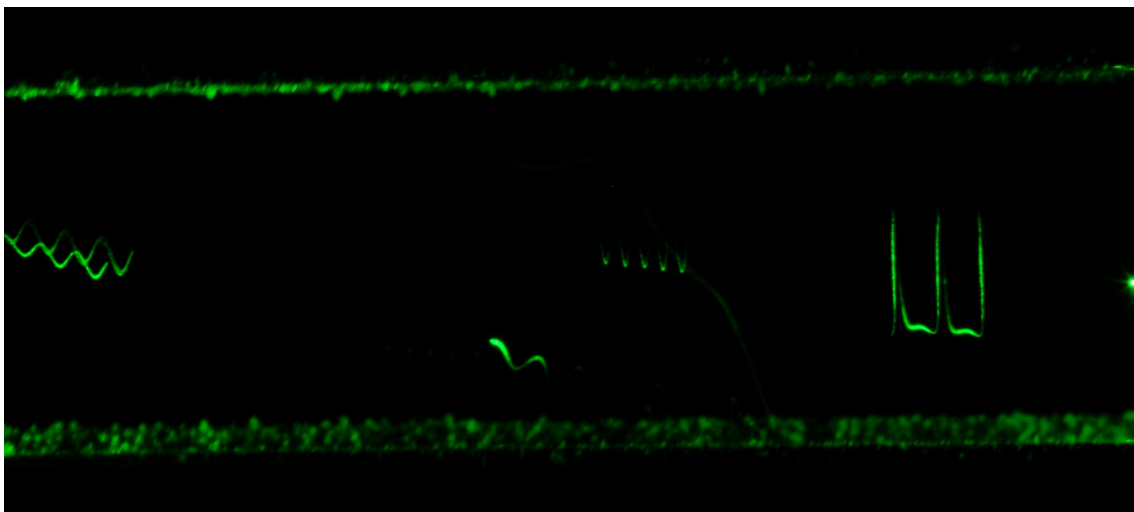
Při experimentování s vlnkami můžeme narazit ještě na několik dalších zajímavých jevů. Na obrázku 5.12 uprostřed jsou vidět dvě vlnky padající příliš prudce dolů. Pravděpodobně byly stabilně chyceny v oblasti nad nabitým koncem hůlky, kde je udržovala elektrostatická síla. Jakmile se ale dostaly do oblasti, kde je elektrostatická síla od konce nabité hůlky ve svislém směru výrazně menší, výsledná efektivní síla pole byla menší než gravitace a částice opustily past.

Taktéž je na obrázku 5.12 v pravé části vidět „podivná“ vlnka, která stoupá do stejné výšky, ale střídavě klesá do různých hloubek. Domnívám se, že je to nedokončený trojúhelník, který jsme popsali v předchozí podkapitole. Jen je vzhůru nohama, protože je v horní části pasti.

Poslední obrázek této podkapitoly 5.13 ukazuje „rozjetý“ čtverec.



Obrázek 5.12: Uprostřed obrázku jsou vidět dvě padající vlnky a v pravé části je vidět „podivná“ vlnka.



Obrázek 5.13: V pravé části obrázku je „rozjetý“ čtverec.

5.6 Zajímavosti a něco k zamyšlení

I po nějaké době zkoumání a experimentování ani zdaleka nedokážu vysvětlit vše, co se v pasti děje. V celé této kapitole jsem ve vysvětlení některých jevů používal pouze své domněnky (vždy jsem uvedl, že se pouze domnívám), ale pro některé jevy nemám ani hypotézu. O nich si řekneme v této podkapitole. Také zde jsou zajímavé jevy, které nebylo kam jinam zařadit.

Na videu 15 je zachyceno chování částic bez akvária. Občas jsem poblíž pasti mávl rukou a rozvířil tak vzduch. Pro experimentování je tedy akvárium důležité.

Dále je zde velmi dobře vidět, že se částice drží v hloučku, pohromadě, i když mají stejný náboj. Ale stejné náboje by se měly odpuzovat!

Hloučky i samostatné částice se někdy, pokud nemají příliš velkou hybnost nebo je netlačí proud vzduchu, odrazí od okraje pasti! Domnívám se, že je odtamtud odpuzují dráty, na něž je přivedeno střídavé napětí. Na obou koncích pasti je vždy jeden zahnutý drát spojující dvě protější elektrody v pasti. Na jednom z nich je ale zem! Teoreticky.

Na videu 16 je několik „kamarádů“, kteří se u sebe drží ať se děje co se děje. Nejprve spolu běhají dokola, pak se na chvíli zastaví v rovnovážné poloze a nakonec spolu i opustí past.

Na videu 17 je nakloněnná past. Částice se výrazněji dají do pohybu až při náklonu téměř 15° . Přitom levitují volně ve vzduchu!

Na posledním videu 18 naleznete můj prst, ke kterému se přitahují nabitě částice. To je důsledkem polarizace molekul v mém nenabitém prstu.

Závěr

Paulovu past jsem si jako téma své bakalářské práce vybral proto, že jsem si mohl vzít experiment „do ruky“ a celý si ho sestavit a řídit sám. Navíc vypadal vizuálně velmi zajímavě a vypadalo to na hodiny dobré zábavy strávené v laboratoři.

V kapitole 1 jsme se zabývali popisem pohybu částic v elektrostatické kvadrupólové pasti, odvodili jsme si potenciál uvnitř pasti a vykreslili siločáry a ekvipotenciály elektrického pole. Také jsme odvodili pohybovou rovnici pro částice, která je formálně podobná tzv. Mathieuově rovnici, a numericky ji vyřešili. Její řešení může být v závislosti na parametrech stabilní či nestabilní, čemuž jsme se věnovali v kapitole 2. Třetí kapitola je pak věnována intuitivnímu vysvětlení principu pasti a výpočtu efektivní síly a efektivního potenciálu uvnitř pasti.

Jak se ale ukázalo, viskozita vzduchu a gravitace zásadním způsobem změny chování částic uvnitř pasti, nelze je tedy v našem experimentu zanedbat. V profesionálních hmotnostních spektrometrech a jiných zařízeních založených na principu kvadrupólové pasti se pracuje většinou s vakuem a měrný náboj bývá mnohem větší, tedy tyto dva efekty lze zanedbat. Proto zkoumání pohybu částice pouze v elektrickém poli má smysl. Doplněním gravitace a viskozity do předchozí teorie se zabývá kapitola 4.

A konečně v poslední kapitole se věnujeme sestavení experimentu a jevům uvnitř pasti, kterých není zrovna málo. Zrníčka polohrubé mouky jsou velmi malá, pouhým okem je téměř nelze vidět, proto k jejich zviditelnění je zapotřebí laseru. Díky tomu se celý experiment stává vizuálně hezký a zajímavý. Částice polohrubé mouky se v experimentu chovají tak, jak předpověděla teoretická část.

Tato bakalářská práce si neklade za cíl vysvětlit a úplně pochopit všechny jevy uvnitř pasti, ale pouze popsat základní pohyb částic analytickými i numerickými postupy a ukázat další zajímavé efekty levitující polohrubé mouky spolu s naznačením možného vysvětlení.

Experiment shledávám natolik hezkým a efektním, že by mi bylo líto, kdyby se na toto dílo pouze prášilo v archivu. Proto jsem se rozhodl navíc vytvořit internetovou stránku, kde jsem zveřejnil obrázky a videa spolu s doprovodným populárně-naučným textem pro veřejnost. Stránky jsou dostupné v češtině i v angličtině a jejich adresa v době odevzdávání práce je www.udif.cz/paultrap.

Příloha

Popisy videí přiložených na DVD

Video 1. Nabíjení prachových částic pomocí hůlky „Fly Stick Van de Graaff Levitation Wand“, ve které je zabudován Van de Graaffův generátor. Alobal na jejím konci umístíme pod dráty, pustíme generátor, mouka vystřeluje směrem vzhůru od hůlky a některé částičky se zachytávají v pasti.

Video 2. Velmi efektní je sedmkrát zpomalené nabíjení (210fps). Při těchto rychlých módech barvy většinou nebývají zachyceny správně.

Video 3. Sedmkrát zpomalená „živá“ částice.

Video 4. Čtrnáctkrát zpomalená „živá“ částice, natáčecí mód 420fps.

Video 5. Průběh většiny mých experimentů. Nabil jsem částice, část z nich se zachytila v pasti, začal jsem zvyšovat napětí a sledovat, co se děje. Když už dosáhnou technických možností zdroje, začnu snižovat napětí. Částičky pomalu klesají, až na konec „umřou“.

Video 6. Frekvence oběhu čtverce je dvojnásobná oproti frekvenci „živé“ částice.

Video 7. V pravé části vidíme čtyři čtverce. Ten nejvíce nalevo se točí opačným směrem než zbylé tři. Druhý zprava je fázově posunutý oproti jeho sousedům o polovinu otočky.

Video 8. První čtverec „vyjíždí“ zprava směrem doleva, skrze druhý „projíždí“ a do třetího naráží.

Video 9. V pravé části videa se proti sobě pohybují dva čtverce posunuté fázově o půl otočky. Chvilí se točí spolu a pak každý pokračuje ve své cestě dále.

Video 10. V pravé části proti sobě jedou dva čtverce s opačným směrem otáčení. Chvilí se spolu „perou“, ale pak pokračují dále a zdá se, že projeli skrze sebe. To není zcela zřejmý výsledek takového „srážky“.

Video 11. V levé části videa se vedle sebe točí dva menší čtverce se stejnou fází. Zdá se, že se od sebe lehce odráží. Jeden pak náhle „vyroste“ v důsledku změny napětí na pasti a projedou skrze sebe.

Video 12. Dva trojúhelníky vzniklé „pokažením“ čtverce. Z videa lze vidět, že v oblasti horního „vrcholu“ se částice zdržuje déle než ve zbylých dvou.

Video 13. Podobné video jako předchozí, jen ještě více zpomalené.

Video 14. Přiblížením nabitého či vybitého konce hůlky dochází k dalšímu jevu, jehož pro jeho podobnost nazýváme vlnky. Na konci videa se mi omylem podařilo zkratovat past, veškeré napětí tedy bylo na ochranných rezistorech a částice pak volně spadly dolů.

Video 15. Pohyb částic v pasti bez akvária. Občas jsem mávl kolem rukou a rozvířil tak vzduch.

Video 16. Několik „kamarádů“, kteří se u sebe drží ať se děje co se děje. Nejprve spolu běhají dokola, pak se na chvíli zastaví v rovnovážné poloze a nakonec spolu i opustí past.

Video 17. Nakloněná rovina. Částice se daly výrazněji do pohybu až při náklonu téměř 15° . Přitom levitují volně ve vzduchu.

Video 18. Na posledním videu naleznete můj prst, ke kterému se přitahují nabitě částice.

Literatura

- [1] Raymond E. March: *Encyclopedia of Analytical Chemistry: Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometer*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2000, R.A. Meyers (Ed.), Dostupné z: www.fontys.nl/fheng/werktuigbouwkunde/medewerker/gbeukema/vacuum/internet/quadr-iontrap1.pdf
- [2] N. W. McLachlan: *Theory and Application of Mathieu functions*, Oxford: University Press, 1951.
- [3] K. Mølhave: *Construction of and Experiments with a Linear Paul Trap*, 2000. Diplomová práce. Institute of Physics and Astronomy University of Aarhus. Dostupné z: kristian.molhave.dk/publications/Molhave2000MastersThesis.pdf

